Probabilités et Statistiques **2010-2011**
IMACS 2ème année

Devoir maison à rendre au plus tard le vendredi 13 mai 2011

Exercice 1

Soit $X_1, ..., X_n$ des v.a. indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1.

1. Calculez la fonction de répartition de $Y_n = \max(X_1, ..., X_n) - \ln n$.
2. Déduisez-en que Y_n converge en loi quand $n \to +\infty$.
3. Donnez la densité de la loi limite.

Exercice 2

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et soit $x \in]0,1[$.

1. Déterminez la loi de la variable aléatoire
$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } U \leq x, \\ 0 & \text{si } U > x. \end{cases}$$
2. Soit $U_1, \ldots, U_n$ des variables indépendantes de même loi que U.
   (a) Soit la v.a. $Y = \text{card}(\{i \in \{1, \ldots, n\};\ U_i \leq x\})$. Quelle est la loi de Y ? Justifiez.
   (b) On ordonne les variables $U_1, \ldots, U_n$ par ordre croissant :
   $$U_{(1)} \leq U_{(2)} \leq \cdots \leq U_{(n)}.$$
      i. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, exprimez l'événement $\{U_{(k)} \leq x\}$ en utilisant la variable aléatoire Y.
      ii. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, montrez que $P(U_{(k)} \leq x) = \sum_{j=k}^{n} C_n^j x^j (1-x)^{n-j}$ et déduisez-en la fonction de répartition de $U_{(k)}$.
      iii. Déduisez-en que la densité de $U_{(k)}$ est définie par
      $$f_{U_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}, \text{ si } x \in]0,1[.$$
   (c) Déterminez la fonction de répartition et la densité de $U_{(1)} = \min(U_1, ..., U_n)$ et de $U_{(n)} = \max(U_1, ..., U_n)$.

Exercice 3 : Loi de Laplace

Cet exercice est consacré à l'étude de la loi de probabilité de Laplace. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Laplace de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $b > 0$, noté $X \sim \text{Lap}(\mu, b)$, si X a pour densité de probabilité

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right).$$

Partie I : caractéristiques de la loi de Laplace Lap(μ, b)

Soit X une variable aléatoire de loi $\text{Lap}(\mu, b)$.

1. Vérifiez que la fonction f_X est une densité de probabilité.
2. Montrez que l'espérance de X vaut μ.
3. Déterminez la variance de X.
4. Déterminez la fonction de répartition de X.

Partie II : Lien entre la loi de Laplace et d'autres lois usuelles

5. Si X suit une loi de Laplace de paramètres $\mu = 0$ et b alors montrez que $|X|$ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
6. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et soit Y une variable aléatoire de loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Déterminez la loi de $Z = X(2Y - 1)$.

Partie III : Estimation et IC pour la moyenne

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi de Laplace $\text{Lap}(\mu, b)$.

7. Proposez un estimateur pour l'espérance μ.
8. Cet estimateur est-il consistant?
9. Cet estimateur est-il sans biais?
10. Déterminez une propriété de convergence en loi de cet estimateur.
11. Supposons que le paramètre b est connu. Construisez un intervalle de confiance au niveau 0.95 pour le paramètre de moyenne μ.
12. Si le paramètre b est inconnu, est-ce que la construction précédente de l'intervalle de confiance reste valable?