Correction DM Proba-Stat

2 MIC / 2 IMACS , 2010-2011

Exc. 1 $X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\sim \mathcal{E}xpo(1)$

1) $Y_n = \max(X_1, \dots, X_n) - \ln n$.

$$F_{Y_n}(x) = \mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x + \ln n)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x + \ln n\}\Big) \underset{\substack{\text{les } X_i \\ \text{sont indépendants}}}{=} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq x + \ln n) =$$

les X_i ont la même loi

$$= \left(F_{X_1}(x + \ln n)\right)^n, \text{ avec } F_{X_1} \text{ la fct. de répart. de } X_1$$

$$\left[F_{X_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases} \right]$$

$$= \begin{cases} \left(1 - e^{-(x + \ln n)}\right)^n, & \text{si } x + \ln n \geq 0 \\ 0, & \text{si } x + \ln n < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \left(1 - \dfrac{e^{-x}}{n}\right)^n, & \text{si } x \geq -\ln n \\ 0, & \text{si } x < -\ln n \end{cases}$$

2) Etudier la convergence de $F_{Y_n}(x)$.

Soit $\underline{x \in \mathbb{R}}$ fixé. Alors $\exists\, n_0$ t.q. $\forall n \geq n_0 : x \geq -\ln n$ (car $-\ln n \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$)

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 : \quad F_{Y_n}(x) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-e^{-x}}.$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_{Y_n}(x) \longrightarrow e^{-e^{-x}}$

ce qui entraîne la convergence en loi de Y_n vers une variable Y de fct. de répartition $\boxed{F_Y(x) = e^{-e^{-x}}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

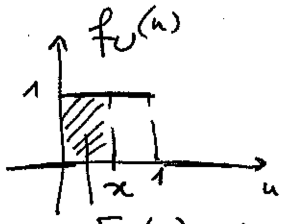
3) $$\underline{f_Y(x)} = F_Y'(x) = e^{-e^{-x}} \cdot \left(-e^{-x}\right)'$$

$$= e^{-e^{-x}} \cdot e^{-x} = \underline{\exp\{-x - e^{-x}\}}, \quad \underline{\forall x \in \mathbb{R}}.$$

$\boxed{\text{Exc. 2}}$ $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, $x \in]0,1[$.

1) $X = \begin{cases} 1, & \text{si } U \leq x \\ 0, & \text{si } U > x \end{cases}$ $\rightarrow$ X suit une loi <u>Bernoulli</u> de param. $p = \mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(U \leq x)$.

On a $p = \mathbb{P}(U \leq x) = F_U(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_U(u)\,du$,



$F_U(x) = x$

avec $f_U(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u \in [0,1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

On obtient $F_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \in [0,1] \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ (la fct. de répartition de la loi $\mathcal{U}([0,1])$)

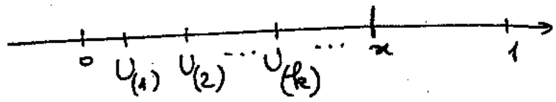
Comme $x \in]0,1[$, on a $p = \mathbb{P}(U \leq x) = \underline{x}$.

donc $X \sim$ Bernoulli (x).

2) a) Si on définit $X_i = \begin{cases} 1, & \text{si } U_i \leq x, \\ 0, & \text{si } U_i > x \end{cases}$

alors $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$, avec X_i indép. et de même loi Bernoulli (x)

$\hookrightarrow$ $Y \sim$ Binomiale (n, x).



b) i) $\{U_{(k)} \leq x\} = \{Y \geq k\}$.

ii) $\mathbb{P}(U_{(k)} \leq x) = \mathbb{P}(Y \geq k) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} C_n^j x^j (1-x)^{n-j}$,

car $Y \sim$ Binomiale (n, x).

et $\{Y \geq k\} = \displaystyle\bigcup_{j=k}^{n} \{Y = j\}$ (réunion disjointe)

$\hookrightarrow$ $F_{U_{(k)}}(y) = \mathbb{P}(U_{(k)} \leq y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=k}^{n} C_n^j y^j (1-y)^{n-j}, & \text{si } y \in]0,1[\\ 0, & \text{si } y \leq 0 \\ 1, & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$

iii) $f_{U_{(k)}}(y) = F'_{U_{(k)}}(y)$.

- Soit $\underline{y \in]0,1[}$ $\rightarrow$ $f_{U_{(k)}}(y) = \displaystyle\sum_{j=k}^{n} C_n^j \Big(j y^{j-1} (1-y)^{n-j} - (n-j) y^j (1-y)^{n-j-1} \Big)$

$$\rightarrow f_{U_{(k)}}(y) = \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot j\, y^{j-1}(1-y)^{n-j} -$$

$$- \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} (n-j)\, y^{j} (1-y)^{n-j-1}$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} y^{j-1}(1-y)^{n-j} - \sum_{j=k}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j-1)!} y^{j}(1-y)^{n-j-1}$$

$i=j-1$ dans la 1ère somme

$$= \sum_{i=k-1}^{n-1} \frac{n!}{i!(n-i-1)!} y^{i}(1-y)^{n-i-1} - \sum_{j=k}^{n-1} \frac{n!}{j!(n-j-1)!} y^{j}(1-y)^{n-j-1}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} y^{k-1}(1-y)^{n-k}$$ (car tous les autres termes s'annulent, comme ils apparaissent dans les deux sommes)

- pour $y \notin]0,1[$, $f_{U_{(k)}}(y) = 0$.

c) $U_{(1)} = \min(U_1, \dots, U_n)$, $U_{(n)} = \max(U_1, \dots, U_n)$

- $$F_{U_{(1)}}(y) = \sum_{j=1}^{n} C_n^j y^j (1-y)^{n-j} = \underbrace{\sum_{j=0}^{n} C_n^j y^j (1-y)^{n-j}}_{=1} - C_n^0 y^0 (1-y)^n$$

$$= \begin{cases} 1-(1-y)^n, & \text{si } y \in]0,1[\\ 0, & \text{si } y \leq 0 \\ 1, & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow f_{U_{(1)}}(y) = \begin{cases} n(1-y)^{n-1}, & \text{si } y \in]0,1[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- $$F_{U_{(n)}}(y) = \sum_{j=n}^{n} C_n^j y^j (1-y)^{n-j} = C_n^n y^n (1-y)^{n-n} = \begin{cases} y^n, & \text{si } y \in]0,1[\\ 0, & \text{si } y \leq 0 \\ 1, & \text{si } y \geq 1 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow f_{U_{(n)}}(y) = \begin{cases} n y^{n-1}, & \text{si } y \in]0,1[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 3

__Partie I :__ 1) $f_X(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)$.

f_X densité $\Leftrightarrow \begin{cases} \cdot\ f_X \geq 0 \quad (\text{OK}) \\ \cdot\ \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1. \end{cases}$

ch. var. $[y = x-\mu]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) dx = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\exp\left(-\frac{|y|}{b}\right)}_{\text{fct. paire}} dy$$

$$= \frac{1}{2b}\cdot 2\int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{y}{b}\right) dy$$

$$= \left[-\exp\left(-\frac{y}{b}\right)\right]_0^{\infty} = 1 - 0 = \boxed{1}$$

$\hookrightarrow$ f_X densité de probabilité.

2) $$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) dx$$

ch. var. $[y = x-\mu]$

$$= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} (y+\mu)\exp\left(-\frac{|y|}{b}\right) dy$$

$$= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y\exp\left(-\frac{|y|}{b}\right)}_{\text{fct. impaire}} dy + \mu\cdot\underbrace{\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{|y|}{b}\right) dy}_{=\,1 \text{ (voir la question 1)}}$$

- On a $\int_0^{\infty} y\exp\left(-\frac{y}{b}\right) dy$ __converge__

(on peut même la calculer facilement, directement ou en remarquant que $\frac{1}{b}\int_0^{\infty} y \exp\left(-\frac{y}{b}\right) dy$ est la moyenne de la loi $\mathcal{E}xpo\left(\frac{1}{b}\right)$, donc vaut b)

En plus, $y \longmapsto y\exp\left(-\frac{|y|}{b}\right)$ fct. __impaire__

$\hookrightarrow$ $$\int_{-\infty}^{\infty} y\exp\left(-\frac{|y|}{b}\right) dy = \underline{0}$$

$\hookrightarrow$ $\underline{\mathbb{E}(X) = \mu}$.

3) $\underline{Var(X)} = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))^2\right] = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 \cdot f_X(x)\,dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx$$

$(y = x-\mu)$ $\displaystyle = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y^2 \exp\left(-\frac{|y|}{b}\right)}_{\text{fct. paire}} dy = \frac{1}{2b}\cdot 2 \cdot \int_{\underline{0}}^{\infty} y^2 \exp\left(-\frac{y}{b}\right)dy$

$$= \int_0^{\infty} y^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{b}\exp\left(-\frac{y}{b}\right)}_{\text{la densité de la loi } \mathcal{E}xpo\left(\frac{1}{b}\right)} dy$$

$$= \mathbb{E}(Y^2), \quad \text{avec } Y \sim \mathcal{E}xpo\left(\frac{1}{b}\right).$$

$$= Var(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2 = b^2 + b^2 = \boxed{2b^2}$$

(On a utilisé le résultat que si $Y \sim \mathcal{E}xpo(\lambda)$, alors $\mathbb{E}(Y) = 1/\lambda$, $Var(Y) = 1/\lambda^2$)

On aurait pu obtenir le résultat final aussi avec un calcul direct d'intégrale (IPP).

4) $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|t-\mu|}{b}\right)dt \overset{[y=t-\mu]}{=} \int_{-\infty}^{x-\mu} \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|y|}{b}\right)dy$$

• Si $\underline{x \leq \mu}$: $\displaystyle F_X(x) = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{x-\mu} \exp\left(\frac{y}{b}\right)dy = \left[\frac{1}{2}\exp\left(\frac{y}{b}\right)\right]_{-\infty}^{x-\mu}$

$$= \frac{1}{2}\exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right).$$

• Si $\underline{x > \mu}$: $\displaystyle F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2b}\exp\left(\frac{y}{b}\right)dy + \int_{0}^{x-\mu} \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{y}{b}\right)dy$

$$= \left[\frac{1}{2}\exp\left(\frac{y}{b}\right)\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left(1 - \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right).$$

$$\hookrightarrow F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right), & \text{si } x \leq \mu \\ 1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right), & \text{si } x > \mu \end{cases}.$$

Partie II :

5) $\mu = 0 \rightarrow f_X(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x|}{b}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Trouver la fct. de répartition de $|X|$:

$$F_{|X|}(y) = \mathbb{P}(|X| \leq y) = \begin{cases} \mathbb{P}(-y \leq X \leq y), & \text{si } y \geq 0 \\ 0, & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ si $\underline{y \geq 0}$: $F_{|X|}(y) = F_X(y) - F_X(-y)$

avec F_X calculée précédemment

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{y}{b}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{y}{b}\right)\right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{y}{b}\right).$$

$$\hookrightarrow F_{|X|}(y) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{y}{b}\right), & \text{si } y \geq 0 \\ 0, & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

On reconnait la fct. de répartition de la loi $\mathcal{E}xpo\left(\frac{1}{b}\right)$.

$\hookrightarrow \underline{|X| \sim \mathcal{E}xpo\left(\frac{1}{b}\right)}.$

---

6) $X \sim \mathcal{E}xpo(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{B}er\left(\frac{1}{2}\right)$, X et Y indép.

$Z = X(2Y-1)$.

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(Z \leq z, Y=0) + \mathbb{P}(Z \leq z, Y=1)$$

$$= \mathbb{P}(-X \leq z, Y=0) + \mathbb{P}(X \leq z, Y=1)$$

$X \perp\!\!\!\perp Y$ (indép.)

$$= \mathbb{P}(-X \leq z)\underbrace{\mathbb{P}(Y=0)}_{=1/2} + \mathbb{P}(X \leq z)\underbrace{\mathbb{P}(Y=1)}_{=1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X \geq -z) + \mathbb{P}(X \leq z)\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + (1 - e^{-\lambda z})\right) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda z}, & \text{si } \underline{z \geq 0} \\ \frac{1}{2}\left(e^{\lambda z} + 0\right) = \frac{1}{2}e^{\lambda z}, & \text{si } \underline{z < 0}. \end{cases}$$

$$\left(\text{car } \mathbb{P}(X \leq z) = F_X(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z}, & \text{si } z \geq 0 \\ 0, & \text{si } z < 0 \end{cases}\right)$$

On a trouvé $F_Z(z) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda z}, & \text{si } z \geq 0 \\ \frac{1}{2}e^{\lambda z}, & \text{si } z < 0 \end{cases}$

On reconnaît (voir la question 4)) la fct. de répartition de la loi $Lap(0, \frac{1}{\lambda})$.

↳ $\underline{Z \sim Lap(0, \frac{1}{\lambda})}$.

<u>Partie III</u> : 7) $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$ estimateur de $\mathbb{E}(X) = \mu$.

8) Oui, l'estimateur $\overline{X}_n$ est consistant, car $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}(X_1) = \mu$, par la Loi des grands nombres.

9) Oui, l'estimateur $\overline{X}_n$ est sans biais, car $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n} \cdot n\,\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_1) = \mu$.

10) Par le Théorème Central Limite (TCL) :

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)\right)}{\sqrt{Var(X_1)}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}oi} \mathcal{N}(0,1)$$

Ici $\mathbb{E}(X_1) = \mu$, $Var(X_1) = 2b^2$ (calculée précédemment)

↳ $$\frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - \mu)}{\sqrt{2}\, b} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}oi} \mathcal{N}(0,1).$$

11) <u>b connu.</u>

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mu\right)}{\sqrt{2}\ b} \xrightarrow[n\to\infty]{Loi} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}_n-\mu\right)}{\sqrt{2}\ b} \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \overset{n \text{ grand}}{\approx}$$

$$\approx \mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \le Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Pour $1-\alpha = 0{,}95$
on trouve avec la table $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = 1{,}96$.

$$\rightsquigarrow \mathbb{P}\left(\overline{X}_n - \frac{\sqrt{2}\,b}{\sqrt{n}}\cdot 1{,}96 \le \mu \le \overline{X}_n + \frac{\sqrt{2}\ b}{\sqrt{n}}\cdot 1{,}96\right) \overset{n \text{ grand}}{\approx} 0{,}95$$

↳ un IC pour μ de niveau de confiance asymptotique 0,95
est $\left[\overline{X}_n \pm \frac{\sqrt{2}\ b}{\sqrt{n}}\cdot 1{,}96\right]$.

12) Si b est inconnu, on ne peut plus construire l'IC comme dans la question précédente.

On doit remplacer $Var(X_1) = 2b^2$ par son estimateur $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2$.

On trouve un IC pour μ de niveau de confiance asymptotique 0,95

$$\left[\overline{X}_N \pm \frac{S_N}{\sqrt{n}}\cdot 1{,}96\right].$$