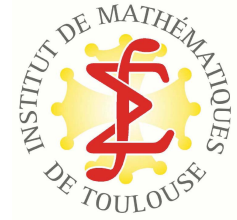




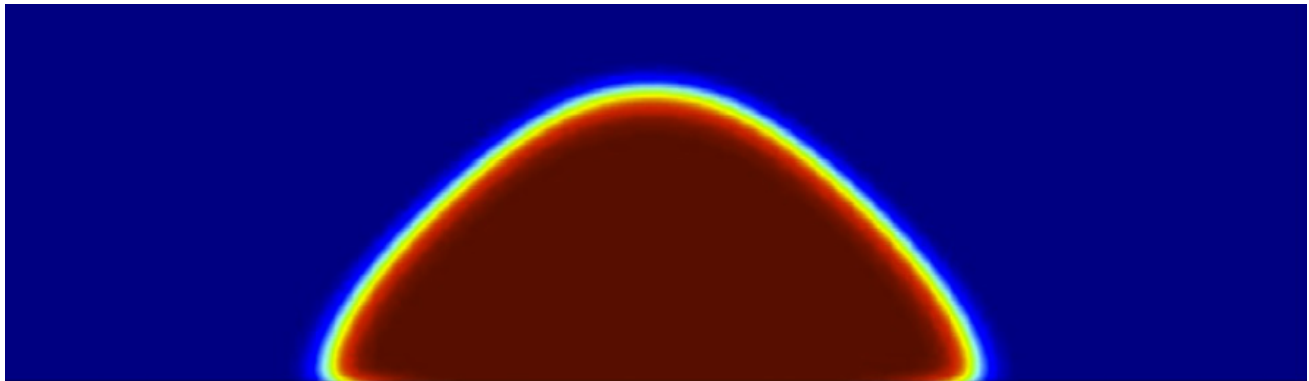
Ecole Normale Supérieure de Cachan
Stage de Master 1



Institut de Mathématiques de Toulouse
Avril 2016 - Juillet 2016

Fronts d'invasion dans un système d'équations de réaction-diffusion

PELTIER Gwenaël



A.C. Coulon, *Propagation in reaction-diffusion equations with fractional diffusion*
Univ. Toulouse et UPC Barcelona, 2014

Référents au sein des établissements :

ENS Cachan :

Alain TROUVE

IMT :

Grégory FAYE

Résumé

Au cours de ce stage, nous avons étudié le système d'équations de réaction-diffusion suivant :

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u) + \beta v^p(1-u) & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{xx} + v(1-v) & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec $d, \beta, p > 0$, $f \in C^2$ une fonction Fisher-KPP, c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0, \\ f'(0) > 0 > f'(1), \\ 0 < f(u) \leq f'(0)u \quad , 0 < u < 1. \end{cases}$$

et u_0, v_0 des perturbations à support compact de la fonction $\mathbf{1}_{x \leq 0}$, telles que $0 \leq u_0, v_0 \leq 1$. Les solutions d'un tel système ressemblent à des fronts qui partent de 1, arrivent en 0, et se propagent vers les x positifs. On s'intéresse à la vitesse asymptotique de ces fronts. Dans le cas découplé $\beta = 0$, si on pose le paramètre $\alpha = f'(0)$, on peut prouver que u (respectivement v) converge vers un front se propageant à la vitesse $2\sqrt{d\alpha}$ (resp 2). Dans le cas couplé $\beta > 0$, l'équation en v ne change pas et donc sa vitesse asymptotique non plus. Cependant, on ne sait pas si la composante u converge vers un front. Comme la solution en u ressemble à un front, on peut mesurer sa vitesse de propagation asymptotique en définissant sa vitesse sélectionnée s_{sel} :

$$\kappa(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x \mid u(t, x) \geq \frac{1}{2} \right\}, \quad s_{sel} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa(t)}{t}.$$

Il faut ensuite construire des sur- et des sous-solutions pour déterminer l'expression de s_{sel} en fonction des paramètres. Cette approche a déjà été réalisée dans le cas $p = 1$ et $f(u) = \alpha u(1-u)$. Dans ce cas bien précis, l'expression de s_{sel} a pu être entièrement déterminée. On constate l'existence d'un domaine des paramètres (d, α) , et ce indépendamment de $\beta > 0$, tels que $s_{sel} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$. Ainsi, dès qu'un couplage existe, la vitesse asymptotique de u peut être plus élevée que les vitesses des deux composantes prises isolément. Une telle vitesse est qualifiée d'anormale. Il s'agit maintenant d'étendre ces résultats pour f Fisher-KPP et $p > 0$ quelconque.

La généralisation au cas f Fisher-KPP n'a pas posé de difficulté significatives. On remarque en effet que s_{sel} ne dépend de f qu'à travers le paramètre $\alpha = f'(0)$. Cela est relié à la condition $f(u) \leq f'(0)u$ dans la définition de f Fisher-KPP. Cette contrainte impose qu'on est en présence de fronts tirés, c'est-à-dire que la dynamique du front, et notamment sa vitesse, est déterminée par l'avant du front, là où il est proche de 0. Cette observation joue un rôle crucial pour déterminer s_{sel} . En effet, comme $p = 1$, on peut linéariser le système autour de $(0, 0)$:

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u + \beta v & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{xx} + v & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

et déterminer explicitement la vitesse de propagation de u , qu'on notera s_{lin} et qu'on appellera vitesse linéaire. Vu que la linéarisation a retiré les contributions négatives $f(u) - \alpha u$, $-\beta v u$ et $-v^2$, on peut prouver par des arguments de sur-solutions que $s_{sel} \leq s_{lin}$. De manière plus générale, s_{lin} sert de prédicteur pour s_{sel} : toutes les valeurs prises par s_{sel} sont également prises par s_{lin} , y compris la vitesse anormale, et on a $s_{sel} < s_{lin}$ uniquement sur une portion réduite du diagramme (d, α) . Enfin, l'estimation de s_{sel} par s_{lin} facilite la construction de sur- et de sous-solutions pour déterminer s_{sel} .

Etendre au cas $p \neq 1$ est plus difficile. Dans ce cas, ou bien la linéarisation est impossible, ou bien elle découple le système. En l'absence de prédicteur, il faudrait induire la formule de s_{sel} des simulations numériques, mais la

construction des sur- et sous-solutions resterait compliquée. A la place, on réalise une « pseudo-linéarisation » en conservant le terme βv^p :

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u + \beta v^p & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{xx} + v & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) & , x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Bien qu'on ne puisse pas savoir explicitement la vitesse de propagation de u dans le système ci-dessus, on peut procéder à une approche heuristique. Dans le cas $p = 1$, le calcul de s_{lin} montre qu'une vitesse anormale apparaît en cas de résonance entre les modes de décroissance spatiale des fronts vers lesquels u et v convergent lorsque $\beta = 0$. Quand $p = 1$, il s'agissait d'une résonance de type $1 - 1$. Ici, le terme βv^p nous a amené à faire l'hypothèse d'une résonance $1 - p$. On en déduit une nouvelle vitesse anormale, et ainsi une vitesse « pseudo-linéaire » \tilde{s}_{lin} . A partir de là, on a pu déterminer l'expression de s_{sel} dans le cas général $p > 0$, et f Fisher-KPP.

L'étape suivante a été de considérer f monostable, ce qui revient à enlever la contrainte $f(u) \leq f'(0)u$. Cependant, même pour $\beta = 0$, aucun résultat général ne donne la vitesse asymptotique de u . On étudie donc l'exemple $f(u) = \alpha u(1-u)(1+au)$, avec $a > 0$. Cette fonction est Fisher-KPP si et seulement si $a \leq 1$. Pour ce f , on peut déterminer la vitesse asymptotique de u , qu'on notera

$$s_u := \begin{cases} 2\sqrt{d\alpha} & , a \leq 2, \\ \left(\frac{2+a}{\sqrt{2a}}\right)\sqrt{d\alpha} & , a \geq 2. \end{cases}$$

Cependant, déterminer s_{sel} pour f monostable est beaucoup plus difficile, surtout pour les bornes supérieures. Sans la condition $f(u) \leq f'(0)u$, nous ne sommes plus forcément en présence de fronts tirés, et la linéarisation autour de $(0, 0)$ ne fournit donc pas un bon prédicteur. On en veut pour preuve que l'expression de s_u ci-dessus dépend de f à travers a , donc un autre paramètre que $\alpha = f'(0)$, quand $a \geq 2$.

Néanmoins, on peut obtenir des bornes inférieures de s_{sel} et montrer l'existence d'une vitesse anormale. On constate d'abord que $f(u) \geq \alpha u(1-u)$. Si on remplace $f(u)$ par $\alpha u(1-u)$, on retire une contribution positive et on retrouve le système de départ avec une fonction $\alpha u(1-u)$ de type Fisher-KPP, donc on connaît la vitesse asymptotique de u , qu'on notera s_{KPP} . Par un argument de sous-solution, on a $s_{sel} \geq s_u$. De même, on a $s_{sel} \geq s_{KPP}$, donc $s_{sel} \geq \max(s_{KPP}, s_u)$. Or, il existe un domaine des paramètres (d, α, a, p) tel que la vitesse anormale de s_{KPP} soit strictement supérieure à $\max(2, s_u)$. On en déduit une vitesse anormale dans s_{sel} également.

Bien qu'on ne puisse pas déterminer l'expression de s_{sel} , notre étude dans le cas f Fisher-KPP nous a permis de conclure l'existence d'une vitesse de propagation anormale dans un cas particulier de fonction f monostable. On dispose également d'une borne inférieure de cette vitesse, à savoir s_{KPP} .

Mots-clés libres : Fronts d'invasion, vitesse de propagation anormale, sur- et sous-solutions, vitesse sélectionnée, monostable

Remerciements

J'ai réalisé ce stage de Master 1 à l'Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), rattaché à l'Université Paul Sabatier.

Je tiens tout d'abord à remercier M. Grégory Faye, pour m'avoir donné l'occasion de faire ce stage, pour ses conseils et son expérience, qui m'ont permis de réaliser ce travail. Je le remercie également pour m'avoir fait participer à son groupe de travail et à l'école d'été du CIRM, qui m'ont aidés à élargir ma vision sur les thématiques de recherche en dynamique des populations et en neurosciences. Enfin, je le remercie pour son soutien financier et ses efforts pour que ce stage se déroule dans les meilleures conditions possibles.

Je tiens à remercier les organisateurs de l'école d'été du Centre International de Rencontres Mathématiques (CIRM), pour m'avoir accepté comme participant et avoir pourvu à mon hébergement sur place.

Je tiens enfin à remercier les différents membres du groupe de travail, et tout particulièrement M. Antoine Pauthier, pour leur attention portée à mon travail, leurs conseils et leur sympathie.

Table des matières

Introduction	6
1 Objectifs et préliminaires	6
1.1 Objectifs	6
1.2 Principe de comparaison et principe du maximum	7
2 Equation de Fisher-KPP	8
2.1 Existence de solutions $U_c(x - ct)$	9
2.2 Convergence de la solution du problème de Cauchy	9
3 Etat de l'art	10
3.1 Fronts tirés, fronts poussés	10
3.2 Expression de la vitesse linéaire dans le cas $p = 1$	12
3.3 Calcul de la vitesse linéaire dans le cas $p = 1$	13
3.4 Vitesse sélectionnée de (1.1) dans le cas $p = 1$	14
4 Détermination de la vitesse sélectionnée dans le cas f Fisher-KPP	15
4.1 Une approche heuristique	15
4.2 Détermination de la vitesse sélectionnée	16
5 Etude du cas f monostable	17
5.1 Equation u isolée	18
5.2 Preuve d'une vitesse anormale	19
5.3 Simulations numériques	20
5.4 Tentative pour la borne supérieure	21
Conclusion	22
Annexe	23
Calcul de la fonction de Green	23
Calcul de la vitesse linéaire dans le cas $p \neq 1$	24
Vitesse sélectionnée pour $p > 0$	35
Sur-solutions	36
Sous-solutions	41
Bibliographie	56

Introduction

Les équations de réaction-diffusion sont un des principaux domaines de recherche en mathématiques appliquées. L'équation de Fisher-KPP, qui sert de base à la grande majorité des modèles, est encore l'objet de nombreuses études aujourd'hui. Ce type d'équations intervient de manière récurrente en neurosciences, en écologie, en dynamique des populations, ou encore en chimie.

Bien qu'on ne connaisse pas la solution exacte de ces équations, une approche populaire pour analyser ces équations se fait par l'étude de fronts d'invasion, et plus particulièrement à la vitesse asymptotique de ces fronts.

C'est dans ce contexte que s'inscrit mon stage de Master 1, qui s'est déroulé au sein de l'Institut de Mathématiques de Toulouse, rattaché à l'Université Paul Sabatier.

1 Objectifs et préliminaires

Dans un premier temps, on explicite l'objectif du stage avant de présenter des résultats élémentaires pour l'étude d'équations de réaction-diffusion.

1.1 Objectifs

Le système étudié est le suivant :

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u) + \beta v^p(1-u) & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{xx} + v(1-v) & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

avec $d, \beta, p > 0$, $f \in C^2$ une fonction Fisher-KPP, c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0, \\ f'(0) > 0 > f'(1), \\ 0 < f(u) \leq f'(0)u \quad , 0 < u < 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

et u_0, v_0 des perturbations à support compact de la fonction $\mathbf{1}_{x \leq 0}$, telles que $0 \leq u_0, v_0 \leq 1$. Les équations des composantes u et v sont typiquement appelées des équations de réaction-diffusion. Les termes du_{xx} et v_{xx} représentent la diffusion spatiale des populations. Les termes $f(u)$ et $v(1-v)$ représentent la reproduction de la population et constituent les termes réactionnels. Ces termes sont nuls quand la population u ou v atteint 1, ce qui représente une saturation de l'environnement. Quitte à faire un changement de variable en temps et en espace, on peut toujours se ramener à des constantes égales à 1 devant les termes de diffusion et de réaction pour l'équation en v .

On admettra l'existence et l'unicité du problème de Cauchy (1.1), comme les autres problèmes qu'on verra au cours de ce rapport. Cela relève de la théorie des semi-groupes, et la preuve ne sera pas détaillée ici. En revanche, la section suivante montre que la solution du problème de Cauchy reste entre 0 et 1. Au vu de nos conditions initiales, ces solutions ressemblent à des fronts reliant l'état 1 quand $x \rightarrow -\infty$ à l'état 0 quand $x \rightarrow +\infty$, voir la Figure 1.1 pour des exemples. On s'intéresse à la vitesse asymptotique de propagation de ces fronts quand $t \rightarrow +\infty$. En ce qui concerne l'équation en v , on verra que la solution converge, dans un sens qu'on précisera, vers un front $V(x - 2t)$ se propageant à la vitesse 2. Dans le cas $\beta = 0$, donc avec un système découplé, on montre de même que la vitesses asymptotique de la composante u est $2\sqrt{df'(0)}$. Elle ne dépend de f qu'à travers le paramètre $\alpha := f'(0)$. On verra qu'on peut prouver ces résultats par une analyse des portraits de phase.

Cependant, dans le cas $\beta > 0$, les équations sont couplées et un portrait de phase devrait être en dimension 4, dont l'étude n'est pas réalisable. On ne peut alors connaître la vitesse de la composante u . Il n'est même pas certain que

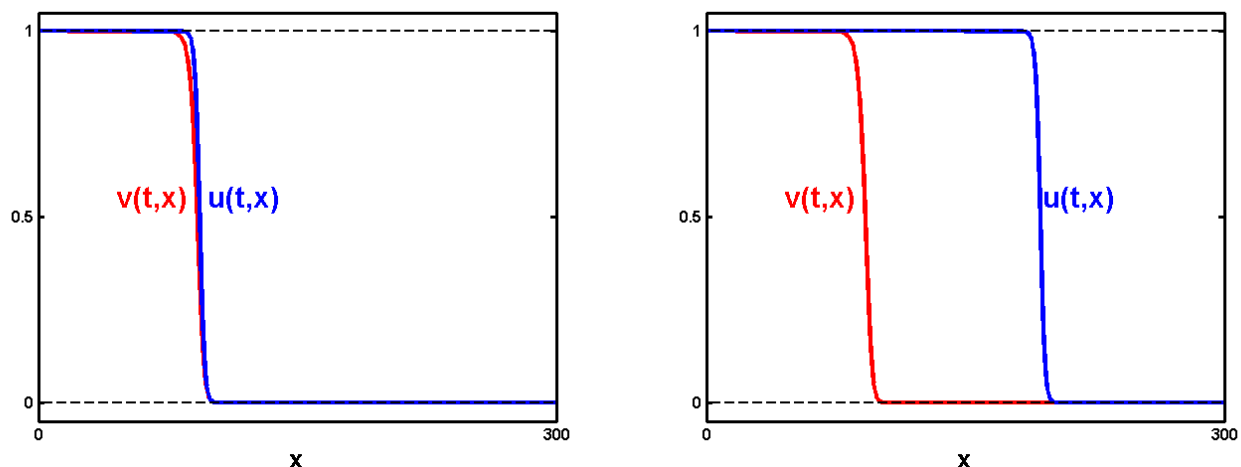


FIGURE 1.1 – Profil de u et v en temps long, pour $\beta = p = a = 1$. À gauche, on a $d = \alpha = \frac{1}{2}$, ce qui implique $2\sqrt{d\alpha} < 2$. La composante v impose sa dynamique à u et on a $s_{sel} = 2$. À droite, on a $d = \alpha = 2$, ce qui implique $2\sqrt{d\alpha} > 2$. Le terme $\beta v^p(1 - u)$ n’influence plus la dynamique de u ce qui donne $s_{sel} = 2\sqrt{d\alpha}$.

celle-ci converge vers un front $U(x - ct)$. Pour représenter la vitesse asymptotique, on définit le point d’invasion

$$\kappa(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ x \mid u(t, x) \geq \frac{1}{2} \right\}, \quad (1.3)$$

ainsi que la vitesse sélectionnée

$$s_{sel} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa(t)}{t}, \quad (1.4)$$

qui dépend a priori des conditions initiales et des paramètres. Le seuil $\frac{1}{2}$ est purement arbitraire et on montrera que la vitesse sélectionnée ne dépend pas de cette valeur, tant qu’elle est prise dans $]0; 1[$. L’objectif est de déterminer l’expression de s_{sel} .

On pourrait croire en premier lieu que la vitesse sélectionnée est un maximum des vitesses asymptotiques des deux composantes u et v isolées, donc $s_{sel} = \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$ (Figure 1.1). Par exemple, si $d\alpha > 1$ et qu’on se place dans une fenêtre $y = x - 2\sqrt{d\alpha}t$, la composante v convergera vers 0 sur tout compact en y quand $t \rightarrow \infty$. On pourrait donc penser que remplacer la contribution $\beta v^p(1 - u)$ par zéro dans l’équation en u donnerait la vitesse sélectionnée. Il se trouve que ce n’est pas toujours le cas : il existe un domaine des paramètres pour lesquels $s_{sel} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$. Ce phénomène a été observé pour la première fois dans [10] et a reçu le nom de « vitesse anormale ».

Au cours de ce rapport, on démontrera l’expression exacte de s_{sel} du système (1.1) dans le cas f Fisher-KPP. On mettra ainsi en évidence l’existence d’une vitesse anormale pour certains paramètres. Dans un second temps, on considèrera des conditions moins restrictives sur f et, en illustrant par un cas particulier, on montrera que l’étude du cas f Fisher-KPP permet parfois conclure à l’existence d’une vitesse anormale dans un cas plus général.

1.2 Principe de comparaison et principe du maximum

Le principe de comparaison consiste à construire des sous- et des sur-solutions d’un problème de Cauchy. Ce sont des fonctions qui majorent ou minorent toute solution. Cette théorie, présentée de manière exhaustive dans [3], sera la base de toutes les preuves concernant l’expression de s_{sel} . Tous les problèmes de Cauchy présentés dans ce rapport vérifient un principe de comparaison. On présente ici une version simplifiée, bien que moins générale, des résultats.

Soit un opérateur parabolique P tel que

$$\begin{aligned} P &:= \partial_t - a(t, x)\partial_{xx} - b(t, x)\partial_x - c(t, x), \\ &=: \partial_t - L, \end{aligned}$$

où a, b, c sont des fonctions continues et bornées sur $]0; T[\times \mathbb{R}$ pour tout $T > 0$, et telles que a est majorée par une constante strictement positive sur $]0; T[\times \mathbb{R}$.

Soit le problème de Cauchy parabolique non linéaire :

$$\begin{cases} \partial_t u - Lu = f(t, x, u) & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.5)$$

où l'on suppose que $u_0, t \mapsto f(t, x, u), x \mapsto f(t, x, u)$ soient continues et $u \mapsto f(t, x, u)$ est C^1 . On pose $N(u) = \partial_t u - Lu - f(t, x, u)$. Soit maintenant $\underline{u}(t, x)$ et $\bar{u}(t, x)$ des fonctions continues qui soient C^1 en temps et C^2 par morceaux en espace. On dit que \underline{u} est une sous-solution si là où elle est $C^{1,2}$, $N(\underline{u}) \leq 0$, et en tout point x_0 de non différentiabilité, une des deux inégalités suivantes est vérifiée :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \partial_x \underline{u} &< \lim_{x \rightarrow x_0^+} \partial_x \underline{u} \leq 0, \\ 0 \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \partial_x \underline{u} &< \lim_{x \rightarrow x_0^+} \partial_x \underline{u}. \end{aligned}$$

De manière équivalente \bar{u} est une sur-solution si $N(\bar{u}) \geq 0$ lorsque ça a un sens, et en les points x_0 de non différentiabilité, on a une des deux inégalités qui est vraie :

$$\begin{aligned} 0 \geq \lim_{x \rightarrow x_0^-} \partial_x \bar{u} &> \lim_{x \rightarrow x_0^+} \partial_x \bar{u}, \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} \partial_x \bar{u} &> \lim_{x \rightarrow x_0^+} \partial_x \bar{u} \geq 0. \end{aligned}$$

Si en plus on a $\underline{u}(0, x) \leq \bar{u}(0, x)$ pour tout x , alors $\underline{u}(t, x) \leq \bar{u}(t, x)$ pour tous (t, x) .

On remarque que la solution $u(t, x)$ de (1.5) est à la fois une sur- et une sous-solution. Ainsi, si on prouve que $\underline{u}(0, x) \leq u_0(x)$ (respectivement $u_0(x) \leq \bar{u}(0, x)$) alors pour tous (t, x) on a $\underline{u}(t, x) \leq u(t, x)$ (respectivement $u(t, x) \leq \bar{u}(t, x)$). En outre, vu les définitions (1.3)-(1.4), on voit que si \underline{u} , ou à défaut son point d'invasion, se propage à la vitesse s , alors $s_{sel} \geq s$. De même, si \bar{u} se propage à la vitesse s , alors $s_{sel} \leq s$. C'est de cette façon qu'on déterminera l'expression de la vitesse sélectionnée.

Le principe du maximum est un prolongement de ce résultat : s'il existe un ouvert de \mathbb{R} tel que $\underline{u}(0, x) < \bar{u}(0, x)$, alors $\underline{u}(t, x) < \bar{u}(t, x)$ pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Là encore on peut remplacer \underline{u} ou \bar{u} par u dans l'énoncé.

2 Equation de Fisher-KPP

Compte tenu que la composante v dans (1.1) évolue indépendamment de u , on peut étudier l'équation pour v en isolation :

$$v_t = v_{xx} + v(1 - v). \quad (2.1)$$

C'est la célèbre équation de Fisher-KPP, qui a été l'objet de nombreuses études, voir [1, 2, 5, 9] entre autres. Les sections qui suivent constituent un rappel de propriétés essentielles de cette équation. Le lecteur familier avec l'équation de Fisher-KPP pourra aller directement à la section 3.

Pour plus de généralité, on considère dans le reste de cette section l'équation

$$u_t = du_{xx} + f(u) \quad (2.2)$$

avec f Fisher-KPP. On peut alors se ramener à l'équation vérifiée par v en posant $d = 1$ et $f(u) = u(1 - u)$. Cela permettra ainsi de prouver que la vitesse asymptotique de l'équation u sans couplage vaut bien $2\sqrt{d\alpha}$.

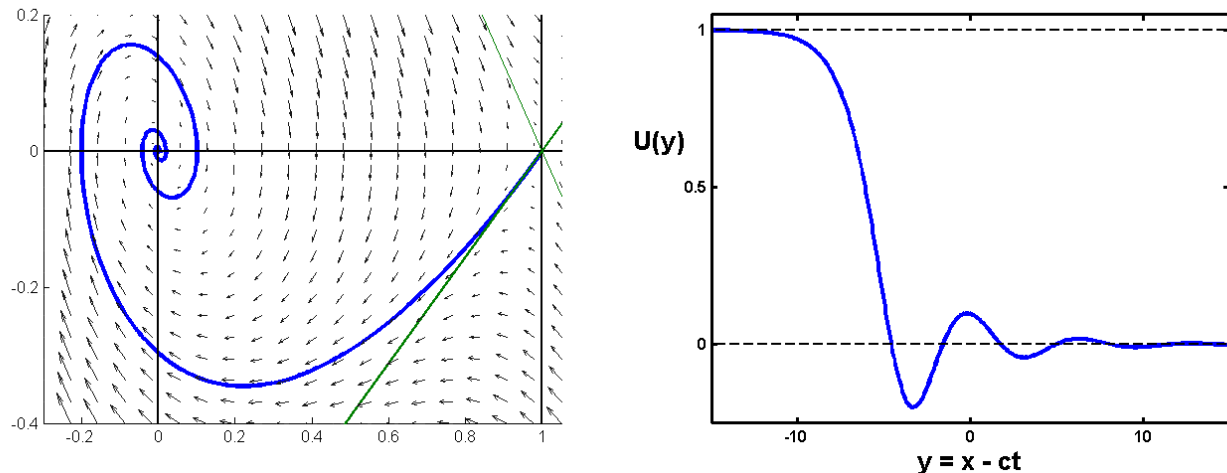


FIGURE 2.1 – A gauche, portrait de phase de (2.3) avec U_c en abscisse et U'_c en ordonnée, pour $d = 1$, $f(u) = u(1-u)$, et $c = \frac{1}{2} < 2\sqrt{d\alpha}$. A droite, le profil obtenu. L'état d'équilibre 1 est un point col, donc instable. L'état 0 est une spirale stable, et U_c y oscille quand $y \rightarrow \infty$.

2.1 Existence de solutions $U_c(x - ct)$

On cherche des solutions de (2.2) avec un profil $U_c(x - ct)$ qui se déplace à la vitesse $c \in \mathbb{R}$. De telles solutions doivent donc vérifier, avec $y = x - ct$,

$$dU_c''(y) + cU_c'(y) + f(U_c) = 0. \quad (2.3)$$

On considère dans un premier temps $c > 0$ et on pose $c^* = 2\sqrt{d\alpha}$. Une étude de portrait de phase réalisée dans [1] montre que pour tout c , il existe une solution $U_c(y)$, unique à translation près, qui relie l'état instable 1 quand $y \rightarrow -\infty$ à l'état stable 0 quand $y \rightarrow +\infty$. De plus, si $c \in]0, c^*[$, U_c oscille autour de 0 (Figure 2.1), qui est une spirale stable, tandis que si $c \geq c^*$, U_c converge vers 0 en décroissant strictement, et donc reste dans $]0, 1[$ pour tout y (Figure 2.1).

On appelle un front un profil qui correspond au cas $c \geq c^*$, à savoir :

$$\begin{cases} U_c(y) \rightarrow 1 & , y \rightarrow -\infty, \\ U_c(y) \rightarrow 0 & , y \rightarrow \infty, \\ U_c(y) \in [0; 1] & , y \in \mathbb{R}, \\ U_c'(y) < 0 & , y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Si $c < 0$, le portrait de phase est le même que celui obtenu pour $-c$ en prenant le symétrique par rapport à l'axe des abscisses, et en inversant le sens de parcours. Le profil partira alors de 0 pour aller vers 1, et se propagera vers la gauche avec une vitesse $|c|$.

2.2 Convergence de la solution du problème de Cauchy

On considère maintenant l'équation (2.2) avec notre condition initiale $u_0 \in [0; 1]$ qui est une perturbation à support compact de $\mathbf{1}_{x \leq 0}$. Dans ce cadre, on peut appliquer la théorie des sur- et sous-solutions. On remarque que $u \equiv 0$ et $u \equiv 1$ sont des solutions particulières de l'équation et constituent donc respectivement une sous- et une sur-solution. Comme u_0 est entre ces valeurs, la solution du problème de Cauchy vérifie $u(t, x) \in [0; 1]$ pour tous (t, x) .

Ainsi, si u devait converger vers un $U_c(x - ct)$, on ne pourrait avoir $c < 2$. En fait, étant donné que notre condition initiale est nulle sur un demi-espace de la forme $[k; +\infty[$, il a été montré dans [1] que la solution converge vers le

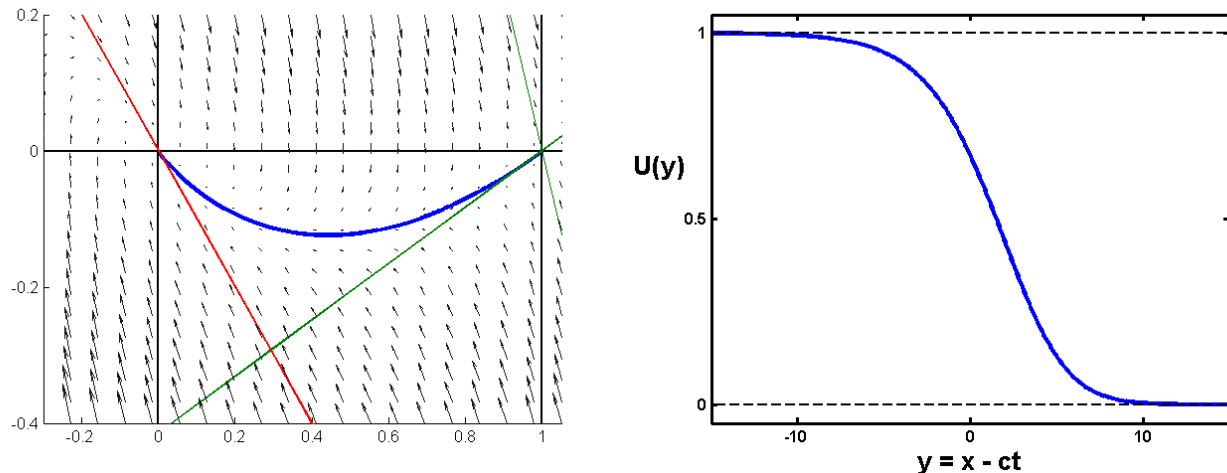


FIGURE 2.2 – A gauche, portrait de phase de (2.3) avec U_c en abscisse et U'_c en ordonnée, pour $d = 1$, $f(u) = u(1 - u)$, et $c = 2 = 2\sqrt{d\alpha}$. A droite, le profil obtenu. L'état d'équilibre 1 est un point col, donc instable. L'état 0 est un noeud stable, et U_c y converge en décroissant strictement quand $y \rightarrow \infty$.

front de vitesse minimale, donc U_{c^*} , au sens suivant :

$$\inf_{x \leq ct} u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 1, \quad \text{pour tout } c < c^*,$$

et

$$\sup_{x \geq ct} u(t, x) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{pour tout } c > c^*.$$

De ce résultat, on en déduit que la vitesse sélectionnée vaut exactement c^* si $\beta = 0$, donc si le système est découplé. A noter que des fronts U_c tels que $c > c^*$ peuvent aussi être atteints, si on avait considéré une condition initiale décroissant exponentiellement quand $x \rightarrow \infty$.

3 Etat de l'art

3.1 Fronts tirés, fronts poussés

Le système (1.1) avait déjà été étudié dans le cas $f(u) = \alpha u(1 - u)$, avec $p = 1$ [7, 8] ou $p = 2$ [4]. Pour ces deux cas, la vitesse sélectionnée a été totalement déterminée, mais on ne parlera ici que du cas $p = 1$. La généralisation à f Fisher-KPP ne présentera pas de difficultés, car dans ce cas f n'influe sur la dynamique qu'à travers le paramètre $\alpha = f'(0)$. Plus précisément, la condition $f(u) \leq \alpha u$, implique qu'à un temps donné, la population situé à l'avant du front détermine la dynamique. De tels fronts sont appelés fronts tirés, par opposition aux fronts poussés (Figure 3.1).

Pour les fronts tirés, linéariser autour du point d'équilibre 0 donne des informations utiles sur la dynamique non linéaire. Pour des équations du type $u_t = du_{xx} + f(u)$ avec f Fisher-KPP, la vitesse de propagation linéaire, donc celle de $u_t = du_{xx} + \alpha u$, est identique à la vitesse non linéaire. Même lorsque ces deux vitesses ne sont pas égales, la vitesse linéaire est un bon prédicteur de celle non linéaire.

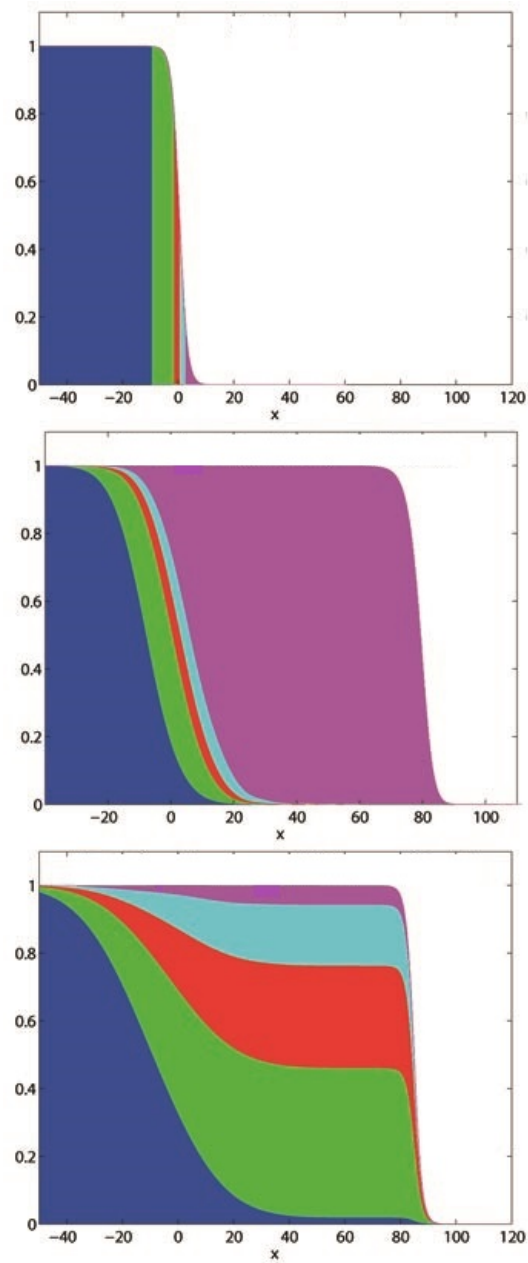


FIGURE 3.1 – En haut, position du front et compartimentage des population à l’instant initial. Au milieu : évolution en temps long dans le cas d’un front tiré. La population située à l’avant du front est la seule à envahir l’espace inhabité. En bas : évolution en temps long dans le cas d’un front poussé. Toutes les populations envahissent l’espace inhabité. Image tirée de la page de Lionel Roques : <http://informatique-mia.inra.fr/biosp/Lionel.Roques>

3.2 Expression de la vitesse linéaire dans le cas $p = 1$

Dans le cas $p = 1$, la linéarisation autour de $(0, 0)$ de (1.1) donne

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + \alpha u + \beta v & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{xx} + v & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) & , x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Comme cela a été fait dans [7], on peut résoudre explicitement le système (3.1) et en déduire la vitesse de propagation linéaire grâce à la théorie des fonctions de Green. Pour cela, on pose $\xi = x - st$, $s > 0$ et on fait une transformation de Laplace en temps avec le mode $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} -\hat{u}(0, \xi) + \lambda \hat{u}(\lambda, \xi) = d\hat{u}_{\xi\xi}(\lambda, \xi) + s\hat{u}_{\xi}(\lambda, \xi) + \beta\hat{v}(\lambda, \xi) & , \lambda \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{R} \\ -\hat{v}(0, \xi) + \lambda \hat{v}(\lambda, \xi) = \hat{v}_{\xi\xi}(\lambda, \xi) + s\hat{v}_{\xi}(\lambda, \xi) + \hat{v}(\lambda, \xi) & , \lambda \in \mathbb{C}, \xi \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ce qu'on peut réécrire comme un système différentiel de degré 1 :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_u - \lambda & \beta \\ 0 & \mathcal{L}_v - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}(\lambda, \cdot) \\ \hat{v}(\lambda, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{u}(0, \cdot) \\ -\hat{v}(0, \cdot) \end{pmatrix},$$

avec $\mathcal{L}_u : f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto df'' + sf' + \alpha f$ et $\mathcal{L}_v : f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto f'' + sf' + f$. Si on note l'opérateur matriciel de cette équation $\mathcal{L} - \lambda I$, la fonction de Green est le noyau de l'opérateur résolvant :

$$(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1}[F](\xi) = \int_{\mathbb{R}} G_{\lambda}^s(\xi - y)F(y)dy, \quad (3.2)$$

avec

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad G_{\lambda}^s(\xi - y) = \begin{pmatrix} G_{\lambda}^{11} & G_{\lambda}^{12} \\ G_{\lambda}^{21} & G_{\lambda}^{22} \end{pmatrix},$$

respectivement un vecteur et une matrice de fonctions dans $L^2(\mathbb{R})$. Nous renvoyons le lecteur à l'Annexe pour le calcul de la fonction de Green. Dans le domaine de Laplace, cela donne la solution

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = - \int_{\mathbb{R}} G_{\lambda}^s(\xi - y) \begin{pmatrix} \hat{u}(0, y) \\ \hat{v}(0, y) \end{pmatrix} dy.$$

A droite du spectre essentiel de $\mathcal{L} - \lambda I$, l'opérateur résolvant est analytique, donc il en est de même pour G_{λ} . On peut alors déterminer la solution générale par la transformée de Laplace inverse :

$$\begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix} = \frac{-1}{2i\pi} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} \left(\int_{\mathbb{R}} G_{\lambda}^s(x - y) \begin{pmatrix} u(0, y) \\ v(0, y) \end{pmatrix} dy \right) d\lambda,$$

où $\Gamma =]\gamma - i \cdot \infty; \gamma + i \cdot \infty[$, $\gamma \in \mathbb{R}$, est le contour d'inversion de Laplace, qui doit se situer à droite de toute singularité de G_{λ}^s . On peut en fait déformer Γ tant qu'on veut, du moment que G_{λ}^s reste analytique dessus. On voit que si on peut choisir Γ dans le demi-plan stable $\text{Re}(\lambda) < 0$, les solutions $u(t, x)$ et $v(t, x)$ décroissent exponentiellement en temps vers 0 à x fixé.

Pour s suffisamment petit, $G_{\lambda}^s(\xi - y)$ a une singularité dans le demi-plan $\text{Re}(\lambda) > 0$. En tout point $\xi = x - st$, la solution diverge à l'infini exponentiellement en temps. On est alors dans le cas d'une instabilité dite absolue. Quand s augmente, les singularités de G_{λ}^s se déplacent vers la gauche. On définit alors la vitesse de propagation linéaire comme

$$s_{lin} = \text{Sup}_{s>0} \{G_{\lambda}^s(\xi) \text{ a une singularité dans le demi-plan instable } \text{Re}(\lambda) > 0\}.$$

Pour $s > s_{lin}$, les singularités se situent dans le demi-plan stable $\text{Re}(\lambda) < 0$. En tout point $\xi = x - st$, la solution tend vers 0 exponentiellement en temps. On est alors dans le cas d'une instabilité dite convective. On montre ainsi que s_{lin} est exactement la vitesse sélectionnée de (3.1).

3.3 Calcul de la vitesse linéaire dans le cas $p = 1$

Les singularités de la fonctions de Green sont reliées aux valeurs propres des opérateurs $\mathcal{L}_{u,v} - \lambda$. On les note respectivement $\nu_u^\pm(s, \lambda)$ et $\nu_v^\pm(s, \lambda)$. Ce sont les solutions des équations caractéristiques, aussi appelées relations de dispersions :

$$\begin{aligned} D_u(s, \lambda) &= d\nu^2 + s\nu + \alpha - \lambda, \\ D_v(s, \lambda) &= \nu^2 + s\nu + 1 - \lambda. \end{aligned}$$

L'expression de ces valeurs propres est donnée par

$$\begin{aligned} \nu_u^\pm(s, \lambda) &= -\frac{s}{2d} \pm \frac{1}{2d} \sqrt{s^2 - 4(\alpha - \lambda)}, \\ \nu_v^\pm(s, \lambda) &= -\frac{s}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)}. \end{aligned}$$

Du fait de la structure triangulaire de $\mathcal{L} - \lambda I$, la relation de dispersion totale est donnée par le produit des deux relations de dispersion :

$$\begin{aligned} D(s, \lambda) &= D_u(s, \lambda)D_v(s, \lambda), \\ &= (d\nu^2 + s\nu + \alpha - \lambda)(\nu^2 + s\nu + 1 - \lambda). \end{aligned}$$

Comme le montre le calcul de la fonction de Green en annexe, une singularité de G_λ^s apparait lorsqu'il y a une racine double de la relation de dispersion $D(s, \lambda)$, c'est-à-dire pour les couples (s, λ) tels que l'une des six égalités suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} \nu_u^+(s, \lambda) = \nu_u^-(s, \lambda), \\ \nu_v^+(s, \lambda) = \nu_v^-(s, \lambda), \\ \nu_u^\pm(s, \lambda) = \nu_v^\mp(s, \lambda), \\ \nu_u^\pm(s, \lambda) = \nu_v^\pm(s, \lambda). \end{cases}$$

Cependant, on montre que les cas $\nu_u^\pm(s, \lambda) = \nu_v^\pm(s, \lambda)$ correspondent à une singularité illusoire de G_λ^s , et que celle-ci peut être prolongée analytiquement à gauche de cette singularité. Ceci est dû au fait que les racines ne sont pas « pincées », c'est-à-dire que le signe de leur partie réelle est identique quand $\text{Re}(\lambda) \rightarrow \infty$. En effet, on a :

$$\text{Re}(\nu^\pm(\lambda)) \xrightarrow{\text{Re}(\lambda) \rightarrow \infty} \pm\infty.$$

Ainsi, G_λ^s perd son caractère analytique en les couples (s, λ) tels que l'une des égalités suivantes est vérifiée :

$$\nu_u^+(s, \lambda) = \nu_u^-(s, \lambda), \quad (3.3)$$

$$\nu_v^+(s, \lambda) = \nu_v^-(s, \lambda), \quad (3.4)$$

$$\nu_u^\pm(s, \lambda) = \nu_v^\mp(s, \lambda). \quad (3.5)$$

La vitesse de propagation linéaire est alors donnée par

$$s_{lin} = \sup\{s > 0 \mid \text{les couples } (s, \lambda) \text{ solutions de (3.3)-(3.5) vérifient } \text{Re}(\lambda) > 0\}.$$

Les calculs, qui sont présentés en Annexe, donnent :

$$s_{lin} = \begin{cases} 2 & , \alpha \leq 2 - d, \\ 2\sqrt{d\alpha} & , d > \frac{1}{2} \text{ et } \alpha \geq \frac{d}{2d-1}, \\ s_{anorm} & , \text{ sinon,} \end{cases}$$

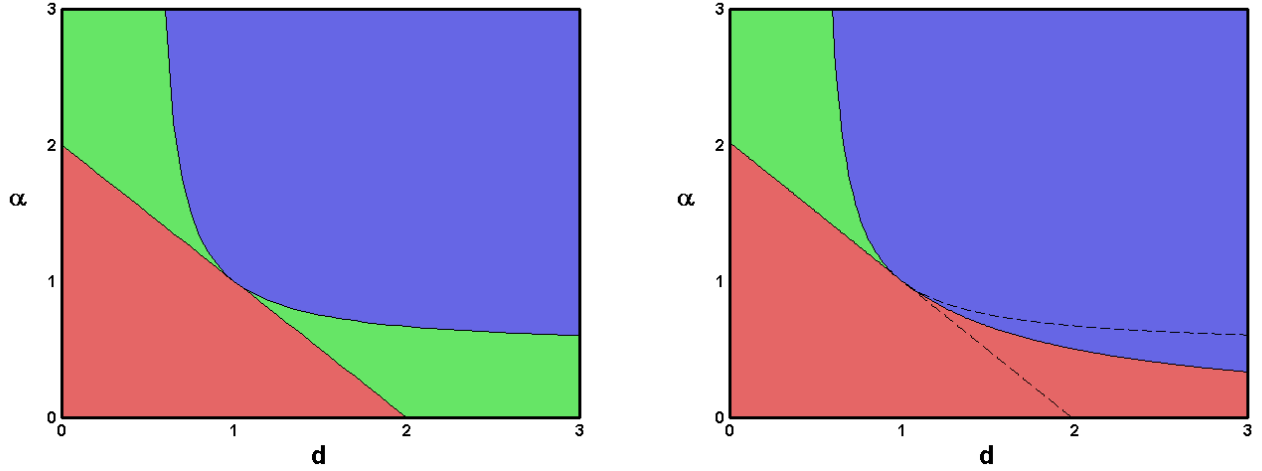


FIGURE 3.2 – A gauche, vitesse de propagation linéaire du système (1.1) dans le cas $p = 1$. A droite, la vitesse de propagation non linéaire. Dans le domaine rouge, la vitesse vaut 2. Dans le domaine bleu, elle vaut $2\sqrt{d\alpha}$. Dans le domaine vert, elle vaut s_{anorm} .

avec une vitesse anormale donnée par

$$s_{anorm} = \sqrt{\frac{\alpha-1}{1-d}} + \sqrt{\frac{1-d}{\alpha-1}} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha}).$$

On dénombre ainsi deux domaines avec une vitesse anormale (Figure 3.2, à gauche). On remarque dans un premier temps que s_{lin} ne dépend pas de $\beta > 0$. Ceci est dû au fait que $\mathcal{L} - \lambda I$ a une structure triangulaire et de ce fait β n'apparaît pas dans la relation de dispersion. Si en revanche on avait introduit un terme de couplage dans l'équation en v , l'opérateur perdrait cette structure et la vitesse dépendrait de β . Une autre remarque importante est que l'expression de s_{lin} est continue en fonction des paramètres d, α .

3.4 Vitesse sélectionnée de (1.1) dans le cas $p = 1$

Comme dit plus haut, la vitesse linéaire sert avant tout de prédicteur pour la vitesse sélectionnée du système non linéaire. Pour la vitesse linéaire, on remarque deux domaines où la vitesse est anormale : un pour $d < 1$, et son symétrique quand $d > 1$. Des simulations numériques laissent penser que la vitesse non linéaire est identique, sauf en ce qui concerne le domaine anormal correspondant à $d > 1$, où la vitesse non linéaire serait égale à $\max(2, 2\sqrt{d\alpha})$ (Figure 3.2, à droite).

Cette conjecture est ensuite validée en construisant des sur- et des sous-solutions pour le système non-linéaire, et ce dans chaque domaine du diagramme (d, α) . Celles-ci seront identiques à celles employées dans le cas général $p > 0$ et ne seront donc pas détaillées ici. La vitesse sélectionnée est donc donnée par :

$$s_{sel} = \begin{cases} 2 & , \alpha \leq 2-d, \\ 2\sqrt{d\alpha} & , d > \frac{1}{2} \text{ et } \alpha \geq \frac{d}{2d-1}, \\ s_{anorm} & , \text{sinon, si } d < 1, \\ \max(2, 2\sqrt{d\alpha}) & , \text{sinon, si } d > 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

On voit que toutes les valeurs possibles pour s_{sel} se retrouvent également dans l'expression de s_{lin} . On dit alors que le système est linéairement déterminé.

En fait, plus qu'un prédicteur, s_{lin} apporte une borne supérieure à s_{sel} . En effet, la linéarisation autour de $(0, 0)$ de (1.1) avec $f(u) = \alpha u(1 - u)$ et $p = 1$, qui donne le système (3.1), ne fait que retirer les contributions négatives $-\alpha u^2$, $-\beta v u$ et $-v^2$. Ainsi, la solution de (3.1) constitue en soi une sur-solution de (1.1). On a donc $s_{sel} \leq s_{lin}$. Enfin, les sur- et sous-solutions sont souvent construites à partir des racines $\nu_{u,v}^\pm$, et le système linéarisé nous donne comment ces racines se comportent en fonction de s, λ . Sans cela, il aurait été difficile de déduire la formule (3.6) à partir des seules simulations numériques. On comprend donc tout l'intérêt d'étudier la forme linéarisée du système non linéaire.

4 Détermination de la vitesse sélectionnée dans le cas f Fisher-KPP

4.1 Une approche heuristique

On revient à l'étude de (1.1), dans le cas $p > 0$, avec f une fonction Fisher-KPP quelconque. Comme pour le cas $p = 1$, on aimerait linéariser le système autour de $(0, 0)$ pour avoir un prédicteur de la vitesse sélectionnée grâce à la vitesse de propagation linéaire. Cependant, si $p < 1$, il est impossible de linéariser le terme $\beta v^p(1 - u)$, tandis que si $p > 1$, la linéarisation découple le système et n'a donc aucun intérêt. Cependant, on peut regarder le système suivant, :

$$\begin{cases} u_t = du_{yy} + su_y + \alpha u + \beta v^p & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ v_t = v_{yy} + sv_y + v & , t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x) & , x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (4.1)$$

où l'on s'est placé dans une fenêtre $y = x - st$. Cela revient à linéariser le système, sauf le terme $\beta v^p(1 - u)$ qui est remplacé par βv^p . Notre objectif n'est pas de calculer explicitement la vitesse de propagation de (4.1), mais d'avoir une approche plus heuristique. On rappelle que quand $p = 1$, la vitesse de propagation linéaire était calculée en regardant pour quelles valeurs de (s, λ) une des égalités (3.3)-(3.5) se produisait. Ces valeurs propres sont celles des opérateurs $\mathcal{L}_u - \lambda$ et $\mathcal{L}_v - \lambda$. Elles ne dépendent donc que des équations en u et v prises en isolation avec $\beta = 0$. Or, l'étude du portrait de phase montre que dans le cas découplé, les deux directions stables pour arriver en 0 quand $y \rightarrow \infty$ sont $u(t, y) \sim e^{\nu_u^+ y}$ et $u(t, y) \sim e^{\nu_u^- y}$, de même pour v . Si on relie cela au fait que l'on est en présence de fronts tirés, on peut faire l'hypothèse que la vitesse anormale est causée par une résonance entre les modes de décroissance spatiale à l'infini des deux fronts u et v . Dans le cas $p = 1$, si on pose

$$\begin{aligned} u(t, y) &= e^{\Lambda t} e^{\nu_u(s, \Lambda) y}, \\ v(t, y) &= e^{\lambda t} e^{\nu_v(s, \lambda) y}, \end{aligned}$$

et qu'on remplace dans (3.1), on voit qu'on ne peut avoir égalité que si $\Lambda = \lambda$ et $\nu_u(s, \Lambda) = \nu_v(s, \lambda)$, ce qui ramène bien aux égalités (3.3)-(3.5). Dans le cas $p \neq 1$, on pose les mêmes expressions pour u et v et si on remplace dans (4.1), on voit qu'on ne peut avoir égalité que si

$$\begin{aligned} \Lambda &= p\lambda, \\ \nu_u(s, \Lambda) &= p\nu_v(s, \lambda). \end{aligned}$$

L'heuristique est donc l'assertion suivante : pour des valeurs fixées de (d, α, p) , on cherche les couples solutions de

$$\nu_u^+(s, \lambda) = \nu_u^-(s, \lambda), \quad (4.2)$$

$$\nu_v^+(s, \lambda) = \nu_v^-(s, \lambda), \quad (4.3)$$

$$\nu_u^\pm(s, p\lambda) = p\nu_v^\mp(s, \lambda), \quad (4.4)$$

et le prédicteur de la vitesse sélectionnée est donné par

$$\tilde{s}_{lin} = \sup \{s > 0 \mid \text{Les couples } (s, \lambda) \text{ solutions de (4.2)-(4.4) vérifient } \text{Re}(\lambda) > 0\}. \quad (4.5)$$

Bien que (4.1) ne corresponde pas à une forme linéarisée, nous appellerons vitesse linéaire l'expression (4.5) par la suite. Cela est dû au fait que cette vitesse jouera le même rôle que pour $p = 1$, vis-à-vis de la vitesse non linéaire. On montre le résultat suivant :

Théorème 1. *La vitesse linéaire définie par (4.5) a pour expression*

$$\tilde{s}_{lin} = \begin{cases} 2 & , \alpha \leq 2p - dp^2, \\ 2\sqrt{d\alpha} & , d > \frac{1}{2p} \text{ et } \alpha \geq \frac{dp^2}{2dp-1}, \\ s_{anorm} & , \text{ sinon,} \end{cases} \quad (4.6)$$

avec

$$s_{anorm} = \sqrt{\frac{\alpha - p}{p - dp^2}} + \sqrt{\frac{p - dp^2}{\alpha - p}}.$$

De plus, $s_{anorm} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$ pour les (d, α) en question, ce qui en fait une vitesse anormale.

Preuve. Voir en Annexe. ■

Le diagramme (d, α) a ainsi une forme similaire au cas $p = 1$ (Figure 4.1 à gauche). D'après les cas d'égalité de s_{anorm} qu'on a mis en évidence, on voit que \tilde{s}_{lin} est une fonction continue des paramètres (d, α, p) . De plus, si on a une vitesse anormale dans le cadran $\{d < 1/p, \alpha > p\}$, cela est dû aux racines $\nu_u^+ = p\nu_v^-$, et si on a une vitesse anormale dans le cadran $\{d > 1/p, \alpha < p\}$, cela est dû aux racines $p\nu_v^+ = \nu_u^-$.

4.2 Détermination de la vitesse sélectionnée

Comme pour le cas $p = 1$, le calcul de \tilde{s}_{lin} permet d'avoir une estimation de la vitesse non linéaire s_{sel} . De plus, comme pour $p = 1$, la solution de (4.1) constitue une sur-solution de (1.1), puisqu'on a retiré les contributions négatives $f(u) - \alpha u$, $-\beta v^p u$, et $-v^2$. Cependant, rappelons que l'on n'a pas prouvé que \tilde{s}_{lin} est la vitesse de propagation de (4.1). Quand $p = 1$, on l'a prouvé en ayant recours aux fonctions de Green. On peut étendre cela au cas $p \in \mathbb{N}^*$ car la transformation de Laplace donne :

$$L[v^p] = L[v] * L[v] * \dots * L[v].$$

Mais dans le cas général $p > 0$, la preuve n'est pas aussi simple. On ne peut donc pas affirmer que $s_{sel} \leq \tilde{s}_{lin}$. Même si a posteriori c'est exact, il faudra construire des sur-solutions supplémentaires pour le montrer.

D'après ce qu'on a prouvé au théorème 1 on définit les domaines suivant dans le diagramme (d, α) :

$$\begin{aligned} \text{I} &= \{\alpha \leq 2p - dp^2\}, \\ \text{II} &= \left\{d > \frac{1}{2p}, \alpha \geq \frac{dp^2}{2dp-1}\right\}, \\ \text{III} &= \left\{d < \frac{1}{p}\right\} \setminus (\text{I} \cup \text{II}), \\ \text{IV} &= \left\{d > \frac{1}{p}\right\} \setminus (\text{I} \cup \text{II}). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Nous allons prouver que la vitesse sélectionnée est égal à la vitesse linéaire pour $(d, \alpha) \in \text{III}$, mais est égale à $\max(2, 2\sqrt{d\alpha})$ pour $(d, \alpha) \in \text{IV}$. Pour cette raison, le domaine III, ainsi que les racines doubles $\nu_u^+ = p\nu_v^-$ associées à ce domaine, seront qualifiés de pertinents. A l'inverse, le domaine IV, avec ses racines $p\nu_v^+ = \nu_u^-$, seront qualifiés de non pertinents. La situation est donc très similaire au cas $p = 1$ (Figure 4.1 à droite).

Dans cette section, on montre donc le résultat suivant :

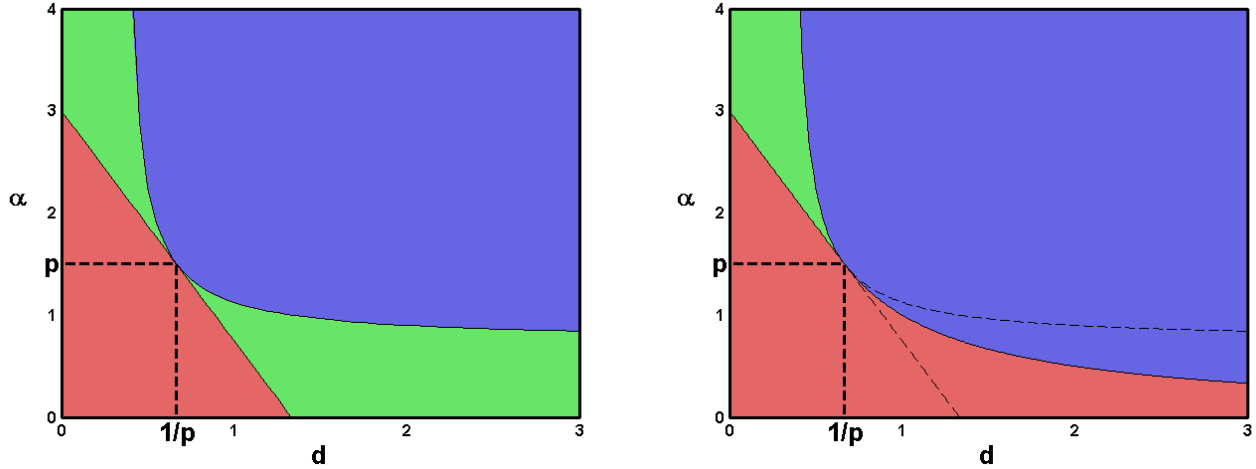


FIGURE 4.1 – A gauche, vitesse linéaire \tilde{s}_{lin} du système (1.1) dans le cas $p = 1,5$. A droite, la vitesse non linéaire s_{sel} . Dans le domaine rouge, la vitesse vaut 2. Dans le domaine bleu, elle vaut $2\sqrt{d\alpha}$. Dans le domaine vert, elle vaut s_{anorm} .

Théorème 2. Soit le système 1.1 avec $d, \beta, p > 0$ et $\alpha = f'(0) > 0$. Soient des données initiales $u_0(x), v_0(x) \in [0; 1]$ qui consistent en une perturbation à support compact de la fonction d'Heaviside $\mathbf{1}_{x \leq 0}$. Alors, dans le diagramme $(d, \alpha) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, il existe des domaines I-IV définis par (4.7) tels que la vitesse sélectionnée définie par (1.3)-(1.4) a pour expression

$$\tilde{s}_{sel} = \begin{cases} 2 & , (d, \alpha) \in \text{I}, \\ 2\sqrt{d\alpha} & , (d, \alpha) \in \text{II}, \\ s_{anorm}(d, \alpha, p) & , (d, \alpha) \in \text{III}, \\ \max(2, 2\sqrt{d\alpha}) & , (d, \alpha) \in \text{IV}, \end{cases}$$

avec

$$s_{anorm} = \sqrt{\frac{\alpha - p}{p - dp^2}} + \sqrt{\frac{p - dp^2}{\alpha - p}}.$$

De plus, $s_{anorm} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$ pour les (d, α) en question, ce qui en fait une vitesse anormale.

Preuve. Voir en Annexe. Le lecteur est invité à regarder au moins la preuve du premier lemme, volontairement détaillée, et qui donne un bon aperçu des autres preuves. ■

5 Étude du cas f monostable

Jusqu'ici, on a considéré f une fonction du type Fisher-KPP, dont la définition est donnée par (1.2). Pour ces types de fonctions la vitesse sélectionnée du système (1.1) est déterminée exactement par le théorème 2. En particulier, on voit que s_{sel} ne dépend de f qu'à travers le paramètre $\alpha = f'(0)$. De plus, toutes les valeurs prises par s_{sel} se retrouvent dans l'expression de \tilde{s}_{lin} . Bien que (4.1) ne corresponde pas à une linéarisation en tant que telle, on peut dire que (1.1) est, pour $p > 0$ quelconque, linéairement déterminé dans un sens plus large. Le théorème 2 nous a permis de mettre en évidence l'existence d'une vitesse anormale $s_{anorm} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$ pour $(d, \alpha) \in \text{III}$.

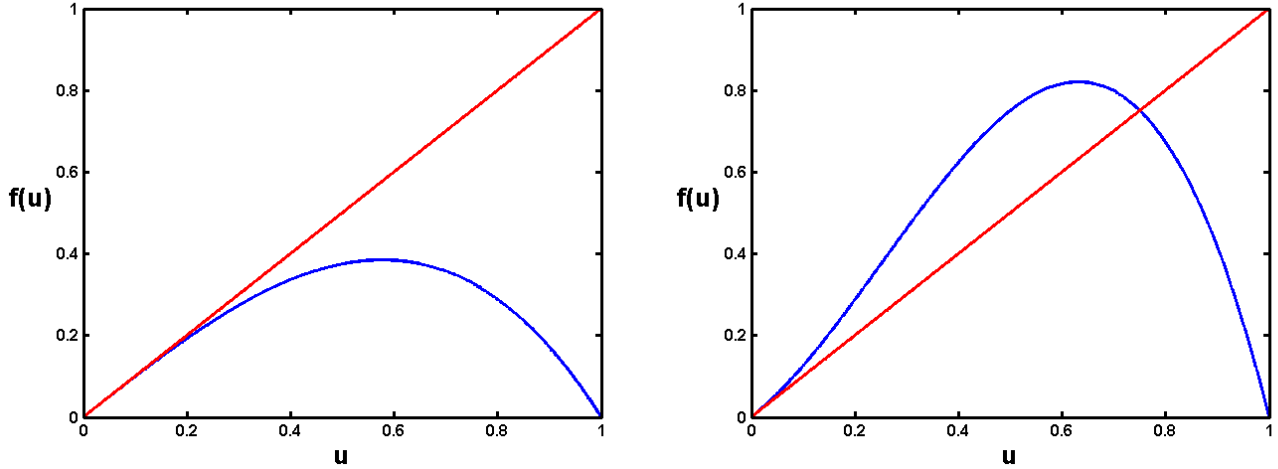


FIGURE 5.1 – Représentation de $f(u) = \alpha u(1-u)(1+au)$, en bleu, et de sa tangente à l’origine en rouge. À gauche, pour $a = 1 = \alpha$, on voit que $f(u) \leq \alpha u$, donc que f est Fisher-KPP. À droite, pour $a = 4$ et $\alpha = 1$, on voit que f est seulement monostable.

On dit que f est monostable si on exclut la condition $f(u) \leq f'(0)u$, c’est-à-dire :

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 0, \\ f'(0) > 0 > f'(1), \\ f(u) > 0, \end{cases} \quad , \quad 0 < u < 1. \quad (5.1)$$

Si on considère f monostable, on ne peut plus déterminer s_{sel} dans le cas général. En fait, même pour l’équation u isolée :

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

on ne dispose pas d’une formule générale pour la vitesse asymptotique s_u de u , contrairement au cas f Fisher-KPP où $s_u = 2\sqrt{df'(0)}$. Or, on ne saurait pas démontrer l’existence d’une vitesse anormale si on ne connaît pas s_u , puisqu’il faut prouver que $s_{sel} > \max(2, s_u)$. Néanmoins, pour une fonction f monostable donnée, si on arrive à connaître s_u , on verra qu’on peut parfois conclure à l’existence d’une vitesse anormale grâce à l’étude qu’on a menée dans le cas f Fisher-KPP.

Au cours de cette section, on va considérer le système (1.1) dans un cas particulier de fonction monostable :

$$f(u) = \alpha u(1-u)(1+au),$$

avec $a > 0$. On remarque que pour $a \leq 1$, c’est une fonction Fisher-KPP, mais pour $a > 1$ elle est seulement monostable (Figure 5.1). Pour cette fonction, on va dans un premier temps calculer s_u , puis montrer l’existence d’une vitesse anormale pour tout $a > 1$ grâce à une borne inférieure de s_{sel} .

5.1 Equation u isolée

L’équation u dans le cas découplé $\beta = 0$, à savoir

$$u_t = du_{xx} + \alpha u(1-u)(1+au) \quad (5.2)$$

a déjà été étudiée dans une forme équivalente dans [5]. Si on cherche des solutions de la forme $U(x - ct)$, celles-ci doivent vérifier

$$dU_c'' + cU_c' + \alpha U_c(1 - U_c)(1 + aU_c) = 0. \quad (5.3)$$

Une étude du portrait de phase réalisée dans [6] montre qu'il existe un profil $U_c(x - ct)$, pour tout $c \in \mathbb{R}$, unique à translation près. De plus, U_c est un front si et seulement si c est supérieur ou égal à

$$c_0 := \begin{cases} 2\sqrt{d\alpha} & , \text{ si } a \leq 2, \\ \left(\frac{2+a}{\sqrt{2a}}\right)\sqrt{d\alpha} & , \text{ si } a \geq 2. \end{cases}$$

Le front de vitesse minimale est donc U_{c_0} .

On regarde maintenant le problème de Cauchy avec $u(0, x) = u_0(x)$. Pour $a \leq 1$, on est dans le cas f Fisher-KPP, donc on sait que u converge vers le front de vitesse minimale U_{c^*} avec $c^* = 2\sqrt{d\alpha}$. Pour $a \geq 1$, f est seulement monostable mais ce résultat reste vrai : pour notre condition initiale u_0 qui est nulle sur un demi-intervalle contenant $+\infty$, la solution du problème de Cauchy converge vers le front de vitesse minimale U_{c_0} .

Notons d'une part que $c_0 \geq c^*$. Cela est dû au fait que la solution du problème de Cauchy $u_t = du_{xx} + \alpha u(1 - u)$, qui converge vers U_{c^*} puisque $u \mapsto \alpha u(1 - u)$ est Fisher-KPP, constitue une sous-solution du problème de Cauchy associé à (5.2), vu que $1 + au \geq 1$. On comprend ainsi pourquoi $c_0 \geq c^*$. Cependant, on voit que linéariser (5.2) autour de 0 nous donne c^* comme prédicteur de c_0 . Or, pour $a > 2$, on a $c_0 > c^*$. Cela signifie que l'on n'est plus en présence de fronts tirés, du fait de la monostabilité de f . C'est l'un des principaux obstacles pour déterminer s_{sel} dans le cas général f monostable, notamment pour les bornes supérieures.

5.2 Preuve d'une vitesse anormale

On retourne au système (1.1) dans le cas couplé $\beta > 0$, avec $f(u) = \alpha u(1 - u)(1 + au)$. On va prouver deux bornes inférieures pour la valeur de s_{sel} du système. Tout d'abord, comme $f(0) = f(1) = 0$ et $f(u) > 0$ pour $0 < u < 1$, on a toujours que $u \equiv 0$ et $u \equiv 1$ sont respectivement une sous-solution et une sur-solution de u . Donc $0 \leq u(t, x) \leq 1$ pour tous (t, x) .

D'une part, on a $\beta v^p(1 - u) \geq 0$. Ainsi, la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

qui constitue en fait le cas découplé du système (1.1), est une sous-solution du système couplé (1.1) avec $\beta > 0$. On déduit alors que $s_{sel} \geq c_0$.

D'autre part, vu que $u \in [0; 1]$, on a $g(u) \leq f(u)$ avec $g(u) = \alpha u(1 - u)$. Ainsi la solution du système

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + g(u) + \beta v^p(1 - u), \\ v_t = v_{xx} + v(1 - v), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), \end{cases}$$

constitue une sous-solution du système (1.1). Or, comme g est de type Fisher-KPP, on peut appliquer le théorème 2. On obtient donc

$$s_{sel} \geq \begin{cases} 2 & , (d, \alpha) \in \text{I}, \\ 2\sqrt{d\alpha} & , (d, \alpha) \in \text{II}, \\ s_{anorm}(d, \alpha, p) & , (d, \alpha) \in \text{III}, \\ \max(2, 2\sqrt{d\alpha}) & , (d, \alpha) \in \text{IV}, \end{cases}$$

avec I-IV les domaines définis par (4.7).

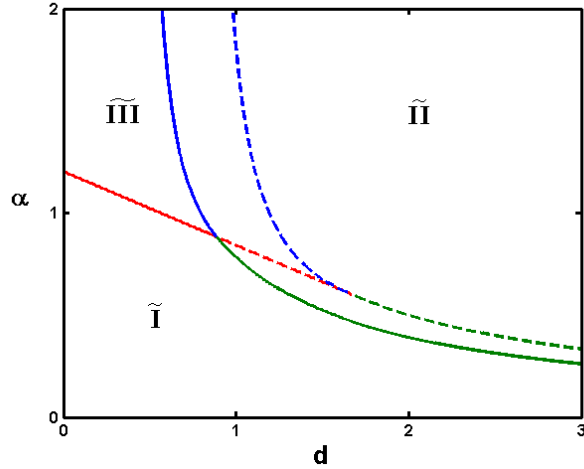


FIGURE 5.2 – Borne inférieure de la vitesse sélectionnée de (1.1) avec $f(u) = \alpha u(1-u)(1+au)$, $p = 0,6$, $a = 5,5$. Le domaine $\tilde{\text{I}}$ correspond à $s_{sel} \geq 2$, le domaine $\tilde{\text{II}}$ correspond à $s_{sel} \geq c_0$, et le domaine $\tilde{\text{III}}$ correspond à une vitesse anormale $s_{sel} \geq s_{anorm} > \max(2, c_0)$. Les lignes pointillées représentent le diagramme pour $a \leq 2$, donc f Fisher-KPP. Tant que f est Fisher-KPP, ce diagramme ne dépend pas de $a \in (0, 2]$.

Ainsi, pour $a \leq 2$, on peut déjà conclure l'existence d'une vitesse anormale $s_{sel} \geq s_{anorm} > \max(2, c_0)$ pour $(d, \alpha) \in \text{III}$. On ne peut toutefois pas prouver la valeur de cette vitesse anormale, si ce n'est qu'elle est supérieure ou égale à s_{anorm} .

Pour $a > 2$, on a $c_0 > 2\sqrt{d\alpha}$ et une vitesse est considérée anormale si elle est strictement supérieure à $\max(2, c_0)$. On résout donc $s_{anorm} > \max(2, c_0)$ pour $(d, \alpha) \in \text{III}$. On trouve alors une vitesse anormale dans le domaine

$$\left\{ 2p - dp^2 < \alpha, dp \leq \frac{2}{a+2} \right\} \cup \left\{ 2p - dp^2 < \alpha < \frac{adp^2}{(2+a)dp-2}, \frac{2}{a+2} < dp < \frac{4}{a+2} \right\}.$$

Cela correspond au domaine $\tilde{\text{III}}$ dans la figure 5.2. Pour $(d, \alpha) \in \tilde{\text{III}}$, on a une vitesse anormale $s_{sel} \geq s_{anorm}(d, \alpha, p) > \max(2, c_0)$.

5.3 Simulations numériques

On résume nos résultats : il existe des domaines $\tilde{\text{I}}$, $\tilde{\text{II}}$, $\tilde{\text{III}}$ dépendant de a, p dans le diagramme (d, α) tels que

$$s_{sel} \geq \begin{cases} 2 & , (d, \alpha) \in \tilde{\text{I}}, \\ c_0 & , (d, \alpha) \in \tilde{\text{II}}, \\ s_{anorm}(d, \alpha) & , (d, \alpha) \in \tilde{\text{III}}. \end{cases} \quad (5.4)$$

L'expression de ces domaines peut être obtenue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\text{III}} &= \{(d, \alpha) \in \text{III} \mid s_{anorm} > \max(2, c_0)\}, \\ \tilde{\text{II}} &= \{c_0 \geq 2\} \setminus \tilde{\text{III}}, \\ \tilde{\text{I}} &= \{2 \geq c_0\} \setminus \tilde{\text{III}}. \end{aligned}$$

De plus, si $a \leq 1$, alors f est Fisher-KPP et le théorème 2 prouve que la borne inférieure de (5.4) est aussi la borne supérieure. Dans les faits, les simulations numériques nous amènent à penser qu'il en va de même pour $a > 1$ (Figure 5.3). Ainsi, pour $f(u) = \alpha u(1-u)(1+au)$, le système (1.1), qui est linéairement déterminé pour $a \leq 1$, semble l'être aussi pour $a > 1$, où f est seulement monostable.

Or, pour le prouver, il faudrait construire des sur-solutions qui se propagent à la même vitesse que nos bornes inférieures données par (5.4). Cependant, les preuves qu'on a données dans le cas f Fisher-KPP utilisent toutes l'identité $f(u) \leq \alpha u$ ce qui permet notamment d'écrire

$$\begin{aligned} N_u(u) &= u_t - du_{xx} - f(u) - \beta v^p(1-u), \\ &\geq u_t - du_{xx} - \alpha u - \beta v^p, \end{aligned}$$

et de construire des sur-solutions à partir des racines $\nu_{u,v}^\pm$ qui sont solutions de la relation de dispersion $D_u D_v$, obtenue après linéarisation autour de $(0,0)$. Toutefois, comme f est monostable, on ne peut minorer $N_u(u)$ de la sorte. Comme on n'est plus en présence de fronts tirés du fait que $c_0 > c^*$, on peut s'attendre à ce que regarder le système linéarisé ne suffise pas, même s'il est linéairement déterminé.

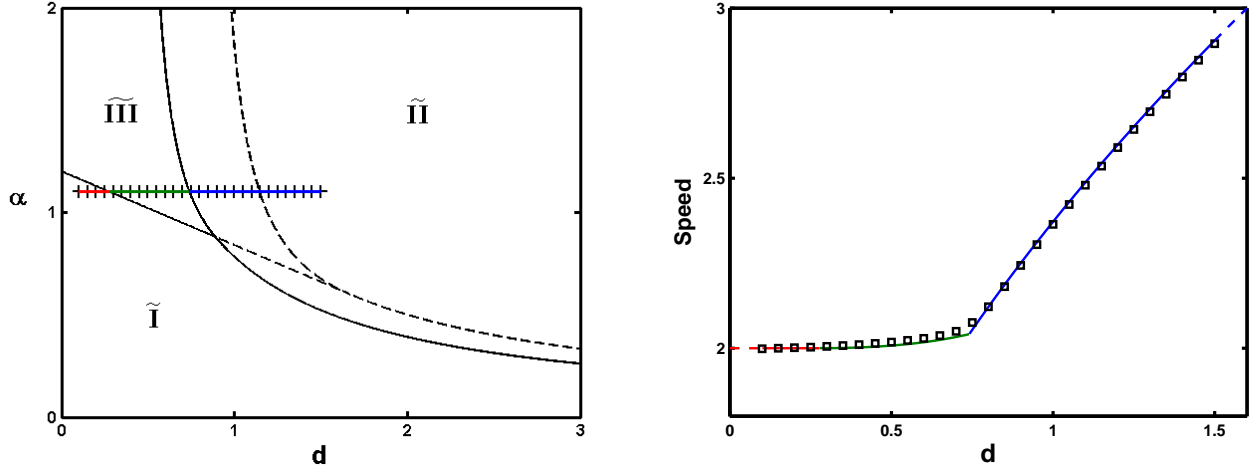


FIGURE 5.3 – Simulations de la vitesse sélectionnée pour les paramètres $a = 5, 5$, $p = 0, 6$, $\alpha = 1, 1$, $\beta = 1$, et pour $d \in [0, 1; 1, 5]$. L'erreur maximum relative est inférieure à $9 \cdot 10^{-3}$.

5.4 Tentative pour la borne supérieure

L'hypothèse que le système (1.1) soit linéairement déterminé alors qu'on n'est pas en présence de fronts tirés peut paraître contradictoire. En réalité, si on considère f monostable, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (5.5)$$

est linéairement déterminée pour des conditions moins restrictives que $f(u) \leq f'(0)u$, donc f Fisher-KPP. Historiquement, les premières preuves utilisées imposaient des conditions encore plus restrictives, comme $f'(u) \leq f'(0)$, ou $f(u)/u$ est une fonction décroissante. Un travail récent [11] montre le résultat suivant :

Théorème 3. Soit $\phi(u)$ une fonction définie sur $[0; 1]$ telle que

- $\phi \in C^0([0; 1]) \cap C^1([0; 1[)$,
- $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) > 0$, $\phi(u) > 0$ sur $]0; 1[$,

- $\phi'(u) < 2\phi'(0)$ sur $[0; 1[$,
- La fonction $K_\phi(u) = \phi(u) [2\phi'(0) - \phi'(u)] / \phi'(0)^2$ satisfait l'inégalité $f(u) \leq f'(0)K_\phi(u)$ pour $0 \leq u \leq 1$, alors la vitesse de propagation asymptotique de (5.5) est linéairement déterminée, donc vaut $2\sqrt{df'(0)}$.

Si on reprend le cas $f(u) = \alpha u(1-u)(1+au)$, ce résultat, permet de prouver que $c_0 = c^*$ pour $1 < a \leq 2$, en reprenant les notations de la section (5.1). En effet, on pose, pour $0 < \gamma \leq 1$,

$$\phi(u) = u(1 - \gamma u).$$

La fonction ϕ est C^1 , s'annule en $u = 0$ et $u = 1/\gamma \geq 1$ et est strictement positive entre ces deux valeurs. Enfin, $\phi'(u) = 1 - 2\gamma u < 2\phi'(0) = 2$. La fonction ϕ vérifie donc les trois premières conditions du théorème 3. La fonction $K_\phi(u)$ s'écrit

$$\begin{aligned} K_\phi(u) &= u(1 - \gamma u) [2 - (1 - 2\gamma u)], \\ &= u(1 - \gamma u)(1 + 2\gamma u), \\ &= u(1 + \gamma u - 2\gamma^2 u^2). \end{aligned}$$

L'inégalité $f(u) \leq f'(0)K_\phi(u)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} (1-u)(1+au) &\leq 1 + \gamma u - 2\gamma^2 u^2, \\ -au^2 + (a-1)u &\leq \gamma u - 2\gamma^2 u^2. \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour $u = 0$. Sinon, on obtient

$$\begin{aligned} -au + a - 1 &\leq \gamma - 2\gamma^2 u, \\ (a - 2\gamma^2)u + (\gamma - a + 1) &\geq 0. \end{aligned}$$

On voit déjà que $0 < a \leq 1$ donne le résultat si on prend $\gamma \leq \sqrt{\frac{a}{2}}$. Pour $a \in]1; 2]$, on peut prendre $\gamma = \sqrt{\frac{a}{2}} \leq 1$, donc le terme linéaire est nul. Le reste est bien positif, car

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\nu}{2}} - \nu + 1 &\geq 0, \\ \sqrt{\frac{\nu}{2}} &\geq \nu - 1 \geq 0, \\ \frac{\nu}{2} &\geq \nu^2 - 2\nu + 1, \\ 0 &\geq 2\nu^2 - 5\nu + 2. \end{aligned}$$

C'est le cas entre les racines de ce polynôme, qui sont de manière évidente $\frac{1}{2}$ et 2. Donc on a le résultat pour $\nu \in]1; 2]$.

Ainsi, quand on considère (1.1) avec $1 < a \leq 2$, on peut majorer $f(u)$ par $\alpha K_\phi(u)$. Intuitivement, on voit que l'hypothèse selon laquelle s_{sel} garde la même expression pour $1 < a \leq 2$, par rapport au cas $0 < a \leq 1$, est certainement reliée au fait que $c_0 = c^*$ pour $a \leq 2$. On pourrait donc avoir la borne supérieure de s_{sel} dans le cas $a \in]1; 2]$ si on arrivait à étendre les preuves des sur-solutions à des cas moins restrictifs que f Fisher-KPP, comme $f(u) \leq \alpha K_\phi(u)$. Néanmoins, construire des sur-solutions telles que $N_u(u) \geq u_t - du_{xx} - \alpha K_\phi(u) - \beta v^p \geq 0$ reste très difficile. Il n'est pas certain que notre fonction ϕ soit la plus adaptée, car notre $K_\phi(u)$ a en fait même degré que $f(u)$.

Conclusion

Au cours de ce rapport, nous avons déterminé la vitesse de propagation asymptotique dans un système de réaction-diffusion avec un terme réactionnel f de type Fisher-KPP. Nous avons ensuite considéré un cas plus général f de

type monostable, et avons montré sur un exemple que bien que la vitesse asymptotique puisse ne pas être déterminée de manière exacte, il était possible de conclure à l'existence d'une vitesse anormale.

Ce stage m'a donné en premier lieu l'occasion d'acquérir des connaissances et de l'expérience en matière de fronts d'invasion. Mais surtout, ce stage m'a permis d'être en contact avec différents chercheurs et doctorants, et ainsi d'avoir une vision plus large des thématiques de recherche mathématiques, notamment en dynamique des populations et en neurosciences.

Enfin, ce stage m'a procuré un éclairage sur les métiers de doctorant et d'enseignant-chercheur, et plus généralement sur le monde de l'enseignement et de la recherche, ce qui a renforcé ma motivation à poursuivre dans cette voie.

Annexe

Calcul de la fonction de Green

On rappelle la théorie des fonctions de Green. Soit \mathcal{D} un opérateur différentiel linéaire à coefficient constants. La fonction de Green est définie par $\mathcal{D}G = \delta$, avec δ la fonction de Dirac. Si la fonction de Green est déterminée, alors la solution de l'équation

$$\mathcal{D}u(x) = F(x),$$

est donnée par

$$u(x) = \mathcal{D}^{-1}[F](x) = (G * F)(x) = \int G(x-y)F(y)dy,$$

ce que traduit l'équation (3.2). On rappelle qu'on veut résoudre

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_u - \lambda & \beta \\ 0 & \mathcal{L}_v - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}(\lambda, \cdot) \\ \hat{v}(\lambda, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{u}(0, \cdot) \\ -\hat{v}(0, \cdot) \end{pmatrix},$$

avec $\mathcal{L}_u : f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto df'' + sf' + \alpha f$ et $\mathcal{L}_v : f \in L^2(\mathbb{R}) \mapsto f'' + sf' + f$. La fonction de Green est alors obtenue par

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_u - \lambda & \beta \\ 0 & \mathcal{L}_v - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_\lambda^{11} & G_\lambda^{12} \\ G_\lambda^{21} & G_\lambda^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta(y) & 0 \\ 0 & \delta(y) \end{pmatrix}.$$

On calcule G_λ^{11} directement à partir de $(\mathcal{L}_u - \lambda)G_\lambda^{11} = \delta$. Pour $\xi \in \mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$d\partial_\xi G_\lambda^{11} + s\partial_\xi G_\lambda^{11} + \alpha G_\lambda^{11} - \lambda = 0,$$

dont la solution générale est

$$G_\lambda^{11}(\xi) = Ae^{\nu_u^- \xi} + Be^{\nu_u^+ \xi},$$

avec ν_u^\pm les deux racines de l'équation caractéristique $D_u(\nu) = d\nu^2 + s\nu + \alpha - \lambda$, à savoir

$$\nu_u^\pm(s, \lambda) = -\frac{s}{2d} \pm \sqrt{s^2 - 4d\alpha + 4d\lambda}.$$

On a de même pour $\xi \in \mathbb{R}_-^*$:

$$G_\lambda^{11}(\xi) = Ce^{\nu_u^- \xi} + De^{\nu_u^+ \xi},$$

La transformation de Laplace est valide pour $\text{Re}(\lambda) \gg 1$. Dans ce cas, on a $\text{Re}(\nu_u^-) < 0 < \text{Re}(\nu_u^+)$. On impose aussi que G_λ^{11} soit bornée, sinon le produit de convolution de (3.2) n'aurait pas de sens. Ainsi, on doit avoir $B = C = 0$. Afin que $(\mathcal{L}_u - \lambda)G_\lambda^{11} = \delta$ en $\xi = 0$, il faut imposer deux autres conditions :

$$\begin{cases} G_\lambda^{11}(\xi) = Ae^{\nu_u^- \xi} & , \xi \in \mathbb{R}_-^*, \\ G_\lambda^{11}(\xi) = De^{\nu_u^+ \xi} & , \xi \in \mathbb{R}_+^*, \\ G_\lambda^{11}(0^+) = G_\lambda^{11}(0^-), \\ \partial_\xi G_\lambda^{11}(0^+) - \partial_\xi G_\lambda^{11}(0^-) = \frac{1}{d}. \end{cases}$$

On a donc $A = D$ et $A(\nu_u^- - \nu_u^+) = \frac{1}{d}$. On obtient donc l'expression suivante :

$$G_\lambda^{11}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{d(\nu_u^- - \nu_u^+)} e^{\nu_u^- \xi} & , \xi > 0, \\ \frac{1}{d(\nu_u^- - \nu_u^+)} e^{\nu_u^+ \xi} & , \xi < 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

De même, on a

$$G_\lambda^{22}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\nu_v^- - \nu_v^+} e^{\nu_v^- \xi} & , \xi > 0, \\ \frac{1}{\nu_v^- - \nu_v^+} e^{\nu_v^+ \xi} & , \xi < 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

avec ν_v^\pm les racines de l'équation caractéristique $D_v(\nu) = \nu^2 + s\nu + 1 - \lambda$.

Ensuite, il est clair que $G_\lambda^{21} = Ae^{\nu_v^- \xi} + Be^{\nu_v^+ \xi}$, en tant que solution de $(\mathcal{L}_v - \lambda)G_\lambda^{21} = 0$. De plus, $A = B = 0$ pour avoir le caractère borné en ξ . Donc $G_\lambda^{21} = 0$.

Pour G_λ^{12} , il est nul aussi quand $\beta = 0$. Mais si $\beta > 0$, l'équation vérifiée par G_λ^{12} est : $(\mathcal{L}_u - \lambda)G_\lambda^{12} + \beta G_\lambda^{22} = 0$. On obtient le résultat d'une manière similaire :

$$G_\lambda^{12}(\xi) = \begin{cases} c_+(\lambda) e^{\nu_u^- \xi} - \frac{\beta}{\nu_u^- - \nu_u^+} \frac{1}{d_u(\nu_v^-, \lambda)} e^{\nu_v^- \xi} & , \xi > 0, \\ c_-(\lambda) e^{\nu_u^+ \xi} - \frac{\beta}{\nu_u^- - \nu_u^+} \frac{1}{d_u(\nu_v^+, \lambda)} e^{\nu_v^+ \xi} & , \xi < 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

avec

$$\begin{aligned} c_+(\lambda) &= \frac{\beta}{(\nu_u^- - \nu_u^+) (\nu_v^- - \nu_v^+)} \left(\frac{\nu_u^+ - \nu_v^+}{D_u(\nu_v^+, \lambda)} - \frac{\nu_v^- - \nu_v^+}{D_u(\nu_v^-, \lambda)} \right), \\ c_-(\lambda) &= \frac{\beta}{(\nu_u^- - \nu_u^+) (\nu_v^- - \nu_v^+)} \left(\frac{\nu_v^+ - \nu_v^-}{D_u(\nu_v^+, \lambda)} - \frac{\nu_v^- - \nu_u^-}{D_u(\nu_v^-, \lambda)} \right). \end{aligned}$$

On a ainsi déterminé exactement la fonction de Green $G_\lambda^s = (G_\lambda^{11}, G_\lambda^{12}, G_\lambda^{21}, G_\lambda^{22})$. En particulier, on voit que G_λ^s admet des singularités pour les couples (s, λ) tels que l'une des six égalités suivantes est vérifiée :

$$\begin{cases} \nu_u^+(s, \lambda) = \nu_u^-(s, \lambda), \\ \nu_v^+(s, \lambda) = \nu_v^-(s, \lambda), \\ \nu_u^\pm(s, \lambda) = \nu_v^\mp(s, \lambda), \\ \nu_u^\pm(s, \lambda) = \nu_v^\pm(s, \lambda). \end{cases}$$

Notons que les expressions (5.6), (5.7), (5.8) sont valides seulement pour $\text{Re}(\lambda) \gg 1$. Cependant, le lecteur pourra vérifier que même pour des valeurs de λ telles que les parties réelles de ν_u ou ν_v ne sont pas ordonnées comme dans le cas $\text{Re}(\lambda) \gg 1$, les singularités de G_λ^s restent inchangées. Or, ce sont ces singularités qui déterminent le contour qu'on peut prendre pour la transformation de Laplace inverse, et c'est la position du contour qui déterminent la stabilité ou l'instabilité de $u(t, x)$ et $v(t, x)$.

Calcul de la vitesse linéaire dans le cas $p \neq 1$

On peut remarquer que le calcul se prête aussi bien au cas $p = 1$.

On cherche, pour chacune des équations (4.2)-(4.4), à savoir la valeur minimale $s_0 > 0$ telle que, pour tout $s \geq s_0$, les couples solutions (s, λ) de cette équation sont tels que $\text{Re}(\lambda) \leq 0$. On rappelle l'expression des racines pour $(s, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \nu_u^\pm(s, \lambda) &= -\frac{s}{2d} \pm \frac{1}{2d} \sqrt{s^2 - 4d(\alpha - \lambda)}, \\ \nu_v^\pm(s, \lambda) &= -\frac{s}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)}. \end{aligned}$$

On résout successivement pour chaque équation.

Equation $\nu_u^+(s, \lambda) = \nu_u^-(s, \lambda)$

Cela revient à avoir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-s + \sqrt{s^2 - 4d(\alpha - \lambda)}}{2d} - \frac{-s - \sqrt{s^2 - 4d(\alpha - \lambda)}}{2d}, \\ 0 &= \sqrt{s^2 - 4d(\alpha - \lambda)}, \\ 0 &= \frac{s^2}{4} - d\alpha + d\lambda. \end{aligned}$$

Comme $d > 0$, il faut avoir $\lambda = \alpha - \frac{s^2}{4d}$. Vu qu'on a raisonné par équivalence, les couples (s, λ) solutions sont exactement :

$$\left\{ \left(s, \lambda = \alpha - \frac{s^2}{4d} \right) \mid s > 0 \right\}.$$

Finalement, la valeur minimale s_0 pour laquelle on a $Re(\lambda) \leq 0$ est $s_0 = 2\sqrt{d\alpha} =: s_{u,lin}$

Equation $\nu_v^+(s, \lambda) = \nu_v^-(s, \lambda)$

C'est le même raisonnement que le cas précédent. Les couples solutions sont exactement :

$$\left\{ \left(s, \lambda = 1 - \frac{s^2}{4} \right) \mid s > 0 \right\}.$$

Finalement, la valeur minimale s_0 pour laquelle on a $Re(\lambda) \leq 0$ est $s_0 = 2 =: s_{v,lin}$

Equations $\nu_u^\pm(s, p\lambda) = p\nu_v^\mp(s, \lambda)$

Des deux équations précédentes, on sait déjà que $\tilde{s}_{lin} \geq \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$.

Conditions nécessaires sur les couples solutions On va résoudre les deux équations en même temps, mais on ne pourra plus raisonner par équivalence. C'est pourquoi, afin de mieux identifier les pertes d'équivalence réalisées, on va résoudre $\nu_u^{\pm u}(s, p\lambda) = p\nu_v^{\mp v}(s, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \frac{-s \pm_u \sqrt{s^2 - 4d(\alpha - p\lambda)}}{2d} &= \frac{-sp \mp_v p \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)}}{2}, \\ -s \pm_u \sqrt{s^2 - 4d(\alpha - p\lambda)} &= -sdp \mp_v dp \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)}, \\ \pm_u \sqrt{s^2 - 4d(\alpha - p\lambda)} &= s - sdp \mp_v dp \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)}. \end{aligned}$$

On peut déjà traiter le cas particulier $d = 1/p$. Dans ce cas, on a une condition nécessaire :

$$\begin{aligned} \pm_u \sqrt{s^2 - \frac{4}{p}(\alpha - p\lambda)} &= \mp_v \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)}, \\ s^2 - \frac{4}{p}(\alpha - p\lambda) &= s^2 - 4(1 - \lambda), \\ \frac{\alpha}{p} - \lambda &= 1 - \lambda, \\ \alpha &= p. \end{aligned}$$

Donc si $d = 1/p$, pour tous $\alpha \neq p$, $(s, \lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$, on a $\nu_u^\pm(s, p\lambda) \neq p\nu_v^\mp(s, \lambda)$: il n'y a aucun couple solution et ces valeurs propres n'interviennent pas dans la vitesse de propagation. Si $\alpha = 1/d = p$, alors on a

$$\begin{aligned} \pm_u \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)} &= \mp_v \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)}, \\ 2\sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)} &= 0, \\ s^2 - 4(1 - \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Donc les couples solutions sont, comme dans le cas précédent, exactement :

$$\left\{ \left(s, \lambda = 1 - \frac{s^2}{4} \right) : s > 0 \right\},$$

et la vitesse minimale est $s_0 = 2$. On n'a donc aucune contrainte supplémentaire sur \tilde{s}_{lin} . On traite maintenant le cas $d \neq 1/p$ et on perd l'équivalence en passant au carré :

$$\begin{aligned} s^2 - 4d(\alpha - p\lambda) &= \left(s - sdp \mp_v dp \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)} \right)^2, \\ s^2 - 4d(\alpha - p\lambda) &= s^2 + s^2 d^2 p^2 + d^2 p^2 (s^2 - 4(1 - \lambda)) - 2s^2 dp, \\ &\quad \mp_v 2sdp \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)} \pm_v 2sd^2 p^2 \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)}, \\ -4d(\alpha - p\lambda) &= 2s^2 d^2 p^2 - 4d^2 p^2 (1 - \lambda) - 2s^2 dp, \\ &\quad \pm_v 2sdp(dp - 1) \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)}, \\ \pm_v 2sdp(1 - dp) \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)} &= 2s^2 d^2 p^2 - 4d^2 p^2 (1 - \lambda) - 2s^2 dp + 4d(\alpha - p\lambda), \\ \pm_v 2sdp(1 - dp) \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)} &= 2s^2 dp(dp - 1) + 4d(\alpha - p\lambda - dp^2 + dp^2 \lambda), \\ \pm_v sp(1 - dp) \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)} &= -s^2 p(1 - dp) + 2(\alpha - dp^2 - p(1 - dp)\lambda). \end{aligned}$$

On divise par $p(1 - dp) \neq 0$, et on pose $X = \frac{\alpha - dp^2}{p - dp^2}$:

$$\pm_v s \sqrt{s^2 - 4(1 - \lambda)} = -s^2 + 2(X - \lambda).$$

On passe une deuxième fois au carré pour obtenir :

$$\begin{aligned} s^2(s^2 - 4(1 - \lambda)) &= s^4 - 4s^2(X - \lambda) + 4(X - \lambda)^2, \\ s^4 - 4s^2 + 4s^2\lambda &= s^4 - 4s^2X + 4s^2\lambda + 4(X - \lambda)^2, \\ -4s^2 &= -4s^2X + 4(X - \lambda)^2, \\ 0 &= (X - \lambda)^2 - s^2(X - 1). \end{aligned}$$

Puis on pose

$$Y = X - 1 = \frac{\alpha - dp^2 - p + dp^2}{p - dp^2} = \frac{\alpha - p}{p - dp^2},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} (\lambda - X)^2 - s^2 Y &= 0, \\ (\lambda - X - s\sqrt{Y})(\lambda - X + s\sqrt{Y}) &= 0. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\lambda_{\pm} = X \pm s\sqrt{Y},$$

avec

$$X = \frac{\alpha - dp^2}{p - dp^2} \in \mathbb{R}, \quad Y = \frac{\alpha - p}{p - dp^2} \in \mathbb{R}.$$

Cependant, on a raisonné par conditions nécessaires. En fait, chaque fois qu'on a mis au carré, on a perdu une des informations \pm_u et \pm_v . Ainsi, un couple (s, λ_{\pm}) est, pour une valeur $s \in \mathbb{R}_+^*$ fixée, solution d'une des quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} \nu_u^{\pm}(s, p\lambda) &= p\nu_v^{\pm}(s, \lambda), \\ \nu_u^{\pm}(s, p\lambda) &= p\nu_v^{\mp}(s, \lambda). \end{aligned}$$

On voit que les deux premières équations ne font pas partie de (4.2)-(4.4), il faut donc uniquement s'intéresser aux couples solutions (s, λ) de $\nu_u^{\pm} = p\nu_v^{\mp}$.

Calcul explicite de $\nu_{u,v}(s, \lambda_{\pm})$ Dans les faits, on peut calculer explicitement les valeurs $\nu_{u,v}^{\pm}$ pour ces couples. En effet :

$$\begin{aligned}
\nu_u^+(s, p\lambda_{\pm}) &= -\frac{s}{2d} + \frac{1}{2d} \sqrt{s^2 - 4d\alpha + 4dp\lambda_{\pm}}, \\
&= -\frac{s}{2d} + \frac{1}{2d} \sqrt{s^2 - 4d\alpha + 4dp \left(\frac{\alpha - dp^2}{p - dp^2} \pm s\sqrt{Y} \right)}, \\
&= -\frac{s}{2d} + \frac{1}{2d} \sqrt{s^2 \pm 4dp\sqrt{Y}s + 4d \left(\frac{\alpha p - dp^3}{p - dp^2} - \alpha \right)}, \\
&= -\frac{s}{2d} + \frac{1}{2d} \sqrt{s^2 \pm 4dp\sqrt{Y}s + 4d \left(\frac{\alpha dp^2 - dp^3}{p - dp^2} \right)}, \\
&= -\frac{s}{2d} + \frac{1}{2d} \sqrt{s^2 \pm 4dp\sqrt{Y}s + 4d^2 p^2 \left(\frac{\alpha - p}{p - dp^2} \right)}, \\
&= -\frac{s}{2d} + \sqrt{\left(\frac{s}{2d} \right)^2 \pm \frac{p}{d} \sqrt{Y}s + p^2 Y}, \\
&= -\frac{s}{2d} + \sqrt{\left(\frac{s}{2d} \pm p\sqrt{Y} \right)^2}, \\
&= \begin{cases} \pm p\sqrt{Y} & , \text{ si } \operatorname{Re}\left(\frac{s}{2d} \pm p\sqrt{Y}\right) \geq 0, \\ -\frac{s}{d} \mp p\sqrt{Y} & , \text{ si } \operatorname{Re}\left(\frac{s}{2d} \pm p\sqrt{Y}\right) \leq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

en rappelant la convention qu'un signe + devant la racine implique qu'on considère la racine complexe telle que son argument soit dans $] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, et qu'un signe - implique qu'on prend la racine complexe d'argument dans $]\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$. L'expression pour ν_u^- est similaire, le signe - ne fait au final qu'échanger les cas. Le calcul de $p\nu_v^{\pm}(s, \lambda_{\pm})$ est identique : il suffit de remplacer α et d par 1. Finalement, comme $d > 0$ et $s \in \mathbb{R}$, on obtient les expressions suivantes, en fonction de $Y' := \operatorname{Re}(\sqrt{Y}) \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
\nu_u^+(s, p\lambda_{\pm}) &= \begin{cases} -\frac{s}{d} \mp p\sqrt{Y} & , \text{ si } s \leq \mp 2dpY', \\ \pm p\sqrt{Y} & , \text{ si } s \geq \mp 2dpY', \end{cases} & \nu_u^-(s, p\lambda_{\pm}) &= \begin{cases} \pm p\sqrt{Y} & , \text{ si } s \leq \mp 2dpY', \\ -\frac{s}{d} \mp p\sqrt{Y} & , \text{ si } s \geq \mp 2dpY', \end{cases} \\
p\nu_v^+(s, \lambda_{\pm}) &= \begin{cases} -sp \mp p\sqrt{Y} & , \text{ si } s \leq \mp 2Y', \\ \pm p\sqrt{Y} & , \text{ si } s \geq \mp 2Y', \end{cases} & p\nu_v^-(s, \lambda_{\pm}) &= \begin{cases} \pm p\sqrt{Y} & , \text{ si } s \leq \mp 2Y', \\ -sp \mp p\sqrt{Y} & , \text{ si } s \geq \mp 2Y'. \end{cases}
\end{aligned}$$

On s'intéresse donc aux couples (s, λ) solutions d'une des deux équations $\nu_u^{\pm} = p\nu_v^{\mp}$. On peut calculer directement les valeurs de $\nu_u^{\pm}(s, p\lambda) - p\nu_v^{\mp}(s, \lambda)$.

Le domaine $\{Y \leq 0\}$ Pour des valeurs de (d, α) telles que $Y \leq 0$, on a $\sqrt{Y} \in i\mathbb{R}$ donc $Y' = 0$. Cela amène au tableau suivant :

Equation	Valeurs de s	Couple (s, λ_+)	Couple (s, λ_-)
$\nu_u^+ - p\nu_v^-$	$s < 0$	$-\frac{s}{d} - 2p\sqrt{Y} \neq 0$	$-\frac{s}{d} + 2p\sqrt{Y} \neq 0$
	$s = 0$	0	0
	$s > 0$	$2p\sqrt{Y} + s \neq 0$	$-2p\sqrt{Y} + sp \neq 0$
$p\nu_v^+ - \nu_u^-$	$s < 0$	$-sp - 2p\sqrt{Y} \neq 0$	$-sp + 2p\sqrt{Y} \neq 0$
	$s = 0$	0	0
	$s > 0$	$2\sqrt{Y} + \frac{s}{d} \neq 0$	$\frac{s}{d} - 2p\sqrt{Y} \neq 0$

TABLE 1 – Résultats pour $(d, \alpha) \in \{Y \leq 0\}$

On a un couple solution si et seulement si la case en question vaut 0. Ce n'est pas le cas pour $s \neq 0$ car la partie réelle de la case en question est non nulle, étant donné que $Re(\sqrt{Y}) = 0$. Comme $\lambda_{\pm}(s=0) = X$, on a pour seules solutions les couples $(0, X)$. Autrement dit, on est stable pour toute fenêtre qui bouge à une vitesse non nulle. Or, non seulement on considère $s > 0$, mais de plus une condition telle que $s \neq 0$ n'apporte aucune contribution observable à la vitesse linéaire, car $\bar{s}_{lin} \geq \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$ d'après les deux premières équations. Il n'y a donc pas de vitesse anormale sur le domaine $\{Y \leq 0\}$.

Le domaine $\{Y > 0\}$ pour le couple (s, λ_+) Etant donné que $Y' > 0$, on est cette fois obligé de séparer en quatre cas : couples (s, λ_{\pm}) d'une part, et le signe de $d - 1/p$ d'autre part. On va dans un premier temps traiter le couple (s, λ_+) . Dans le tableau qui suit, on notera, à Y et d fixés :

$$m := \min(-2Y', -2dpY') < 0, \quad M := \max(-2Y', -2dpY') < 0.$$

Equation	Valeurs de s	Couple (s, λ_+) , $d < 1/p$	Couple (s, λ_+) , $d > 1/p$
$\nu_u^+ - p\nu_v^-$	$s < m$	$-\frac{s}{d} - 2p\sqrt{Y} \neq 0$	$-\frac{s}{d} - 2p\sqrt{Y} \neq 0$
	$m \leq s \leq M$	$-\frac{s}{d} + sp \neq 0$	0
	$M < s$	$2p\sqrt{Y} - sp \neq 0$	$2p\sqrt{Y} - sp \neq 0$
$p\nu_v^+ - \nu_u^-$	$s < m$	$-sp - 2p\sqrt{Y} \neq 0$	$-sp - 2p\sqrt{Y} \neq 0$
	$m \leq s \leq M$	0	$\frac{s}{d} - sp \neq 0$
	$M < s$	$\frac{s}{d} + 2p\sqrt{Y} \neq 0$	$\frac{s}{d} + 2p\sqrt{Y} \neq 0$

TABLE 2 – Résultats pour $(d, \alpha) \in \{Y > 0\}$ et le couple (s, λ_+)

A noter que les cases $\pm(sp - \frac{s}{d})$ sont non nulles car cela arrive pour $s \leq M < 0$ et qu'on est dans le cadre $d \neq 1/p$. Alors on a des couples solutions pour $\nu_v^+ = \nu_u^-$ dans le cadran

$$\{Y > 0\} \cap \{d < 1/p\} = \{d < 1/p, \alpha > p\},$$

et pour $\nu_u^+ = \nu_v^-$ dans le cadran

$$\{Y > 0\} \cap \{d > 1/p\} = \{d > 1/p, \alpha < p\}.$$

Toutefois, dans les deux cas les vitesses qui interviennent sont négatives, et sortent donc de notre cadre $s > 0$. Ainsi, les couples (s, λ_+) ne sont jamais solutions et ne donnent pas lieu à une vitesse anormale dans notre cas. Si toutefois nos fronts se déplaçaient vers la gauche, ce serait ces couples qu'il faut considérer.

Le domaine $\{Y > 0\}$ pour le couple (s, λ_-) On notera cette fois dans le tableau suivant :

$$m := \min(2Y', 2dpY') > 0, \quad M := \max(2Y', 2dpY') > 0.$$

Equation	Valeurs de s	Couple (s, λ_-) , $d < 1/p$	Couple (s, λ_-) , $d > 1/p$
$\nu_u^+ - p\nu_v^-$	$s < m$	$-\frac{s}{d} + 2p\sqrt{Y} \neq 0$	$-\frac{s}{d} + 2p\sqrt{Y} \neq 0$
	$m \leq s \leq M$	0	$-\frac{s}{d} + sp \neq 0$
	$M < s$	$-2p\sqrt{Y} - sp \neq 0$	$-2p\sqrt{Y} - sp \neq 0$
$p\nu_v^+ - \nu_u^-$	$s < m$	$-sp + 2p\sqrt{Y} \neq 0$	$-sp + 2p\sqrt{Y} \neq 0$
	$m \leq s \leq M$	$\frac{s}{d} - sp \neq 0$	0
	$M < s$	$\frac{s}{d} - 2p\sqrt{Y} \neq 0$	$\frac{s}{d} - 2p\sqrt{Y} \neq 0$

TABLE 3 – Résultats pour le couple (s, λ_-)

On a des couples (s, λ_-) solutions pour $s > 0$. On obtient ainsi les ensembles de solutions suivants pour les équations (4.4) :

$$\left\{ \left\{ (s, X - s\sqrt{Y}) \mid s \in [2dpY'; 2Y'] \right\} \right\}, \text{ si } Y > 0 \text{ et } d < 1/p,$$

$$\left\{ \left\{ (s, X - s\sqrt{Y}) \mid s \in [2Y'; 2dpY'] \right\} \right\}, \text{ si } Y > 0 \text{ et } d > 1/p.$$

avec la première ligne pour l'équation $\nu_u^+ = p\nu_v^-$ et la deuxième ligne pour l'équation $p\nu_v^+ = \nu_u^-$. Il faut maintenant regarder, à (d, α) fixés et pour chaque ensemble, s'il existe une valeur $s_0 > 0$ telle que pour tout $s > s_0$, les couples des ensembles solutions, s'ils existent pour ces valeurs de s , vérifient $Re(\lambda_-) < 0$.

Les trois sous-cas du domaine $\{Y > 0\}$ Comme $Y > 0$, on a $Y' = \sqrt{Y} \in \mathbb{R}_+^*$. De plus, on peut utiliser l'identité suivante :

$$X = \frac{\alpha - dp^2}{p - dp^2} = \frac{\alpha - p + p - dp^2}{p - dp^2} = Y + 1,$$

ce qui donne

$$Re(\lambda_-) = Re(X) - sRe(\sqrt{Y}) = Y + 1 - s\sqrt{Y}.$$

Donc $Re(\lambda_-) = 0$ si $s\sqrt{Y} = Y + 1$, ou encore $s = s_{anorm} := \sqrt{Y} + 1/\sqrt{Y}$. On verra plus loin que c'est bien une vitesse anormale. Ainsi, pour tout $s > s_{anorm}$, on a $Re(\lambda_-) < 0$. Mais il n'est pas toujours nécessaire d'aller jusque là. On peut distinguer trois sous-cas différents :

- Cas 1 : $s_{anorm} \leq \min(2dp\sqrt{Y}, 2\sqrt{Y})$. Ici, tous les couples solutions (s, λ_-) qu'on peut trouver vérifient déjà $Re(\lambda_-) < 0$. Il n'y a donc aucune condition supplémentaire pour \tilde{s}_{lin} (Figure 5.4). On a donc $\tilde{s}_{lin} = \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$.
- Cas 2 : $\max(2dp\sqrt{Y}, 2\sqrt{Y}) \leq s_{anorm}$. Donc pour les valeurs de s inférieures ou égales à $\max(2dp\sqrt{Y}, 2\sqrt{Y})$, on a toujours $Re(\lambda_-) > 0$. On est donc obligés d'avoir $s > \max(2dp\sqrt{Y}, 2\sqrt{Y})$, mais pas plus, car à partir de là, les couples (s, λ_-) ne sont plus solutions (Figure (5.5)).
- Cas 3 : $\min(2dp\sqrt{Y}, 2\sqrt{Y}) < s_{anorm} < \max(2dp\sqrt{Y}, 2\sqrt{Y})$. On est alors obligés d'avoir $s > s_{anorm}$ pour garantir que $Re(\lambda_-) < 0$ dès que $\nu_u^\pm = \nu_v^\mp$ (Figure (5.6)).

Selon les valeurs de (d, α) , qui déterminent la valeur de Y , on est forcément dans un de ces trois cas. On va dans un premier temps formuler quelques résultats préliminaires sur s_{anorm} , avant de montrer que le cas 2 n'entraîne pas de vitesse anormale, puis on conclura en étudiant le cas 3.

Quelques résultats sur s_{anorm} Pour $Y > 0$, on cherche les valeurs de (d, α) telles que $s_{anorm} \geq 2$ ou $s_{anorm} \geq 2\sqrt{d\alpha}$. Tout d'abord, la fonction $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$ vaut $f(1) = 2$ en son minimum pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Or, $s_{anorm} = f(\sqrt{Y})$ donc on a toujours $s_{anorm} \geq 2$ avec égalité si et seulement si :

$$\begin{aligned} \sqrt{Y} &= 1, \\ Y = \frac{\alpha - p}{p - dp^2} &= 1, \\ \alpha &= 2p - dp^2. \end{aligned}$$

Pour le cas $s_{anorm} \geq 2\sqrt{d\alpha}$, on démontre le résultat :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\alpha - p}{p - dp^2}} + \sqrt{\frac{p - dp^2}{\alpha - p}} &\geq 2\sqrt{d\alpha} > 0, \\ \frac{\alpha - p}{p - dp^2} + \frac{p - dp^2}{\alpha - p} + 2 &\geq 4d\alpha. \end{aligned}$$

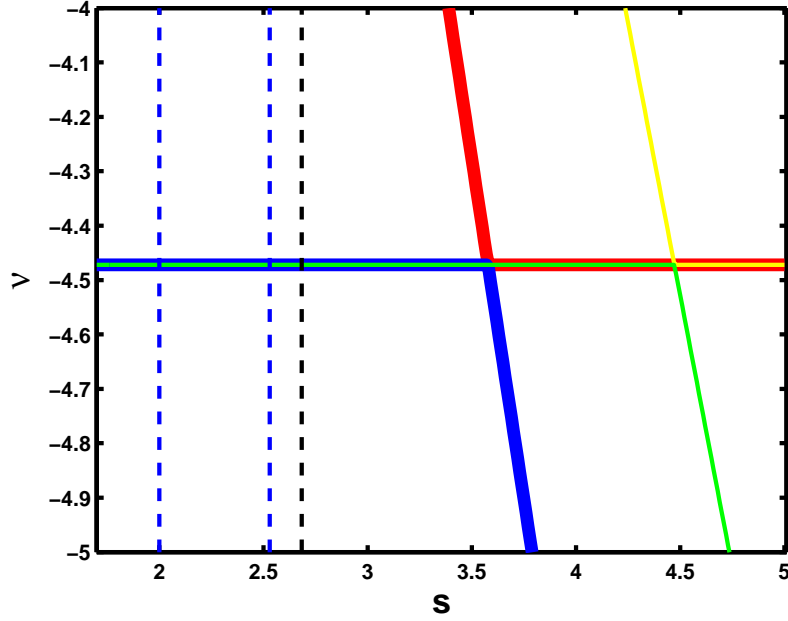


Figure 5.4 – Variations des racines $\nu_{u,v}^{\pm}$ en fonction de s pour les paramètres $p = 2$, $d = 0, 4$, $\alpha = 4$. En rouge $\nu_u^+(s, p\lambda_-(s))$, en bleu, $\nu_u^-(s, p\lambda_-(s))$, en vert, $p\nu_v^-(s, \lambda_-(s))$, et en jaune $p\nu_v^+(s, \lambda_-(s))$. Les deux lignes bleues en pointillés représentent $s = 2$ et $s = 2\sqrt{d\alpha}$. La ligne noire représente $s = s_{anorm}$. A droite de cette ligne, on a $\text{Re}(\lambda_-(s)) \leq 0$, ce qui est, ici, le cas des valeurs de s pour lesquelles $\nu_u^+ = p\nu_v^-$.

Ce qui donne, comme $(\alpha - p)(p - dp^2) > 0$,

$$\begin{aligned}
(\alpha - p)^2 + (p - dp^2)^2 + 2(\alpha - p)(p - dp^2) - 4d\alpha(p - dp^2)(\alpha - p) &\geq 0, \\
(\alpha - p + p - dp^2)^2 - 4d(p - dp^2)(\alpha^2 - p\alpha) &\geq 0, \\
(\alpha - dp^2)^2 - 4d(p - dp^2)\alpha^2 + 4dp(p - dp^2)\alpha &\geq 0, \\
[1 - 4d(p - dp^2)]\alpha^2 + [4dp(p - dp^2) - 2dp^2]\alpha + d^2p^4 &\geq 0, \\
[1 - 4dp + 4d^2p^2]\alpha^2 + [4dp^2 - 4d^2p^3 - 2dp^2]\alpha + d^2p^4 &\geq 0, \\
[(1 - 2dp)^2]\alpha^2 + [2dp^2(1 - 2dp)]\alpha + d^2p^4 &\geq 0, \\
[(1 - 2dp)\alpha + dp^2]^2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Le cas $d = p^{-1}/2$ donne $d^2p^4 = \frac{p^2}{4} > 0$ donc on a $s_{anorm} > 2\sqrt{d\alpha}$. Pour $d \neq p^{-1}/2$, on a $s_{anorm} \geq 2\sqrt{d\alpha}$ avec égalité si et seulement si $\alpha = \alpha_0$ tel que

$$\begin{aligned}
(1 - 2dp)\alpha_0 + dp^2 &= 0, \\
\alpha_0 &= \frac{dp^2}{2dp - 1}.
\end{aligned}$$

On remarque que $\alpha_0 \geq 0$ si et seulement si $d > \frac{1}{2}$. On a donc toujours $s_{anorm} \geq 2\sqrt{d\alpha}$ avec égalité si et seulement si $d > \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{d}{2d-1}$. On a donc en plus prouvé le résultat suivant :

$$s_{anorm} = 2 \Leftrightarrow Y = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2p - dp^2 \Leftrightarrow s_{anorm} = 2Y', \quad (5.9)$$

$$s_{anorm} = 2\sqrt{d\alpha} \Leftrightarrow Y = \frac{\alpha}{dp^2} \Leftrightarrow \left(d > \frac{1}{2p} \text{ and } \alpha = \frac{dp^2}{2dp - 1} \right) \Leftrightarrow s_{anorm} = 2dpY'. \quad (5.10)$$

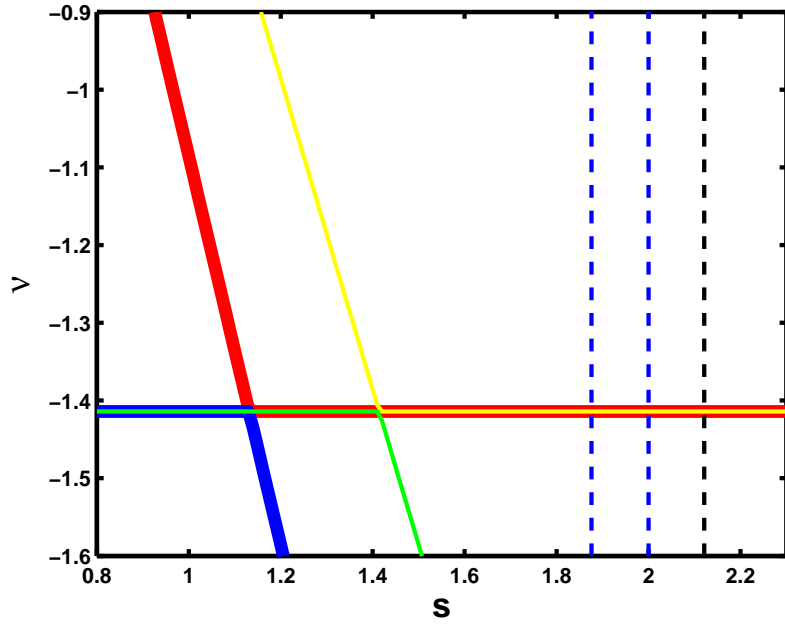


Figure 5.5 – Variations des racines $\nu_{u,v}^{\pm}$ en fonction de s pour les paramètres $p = 2$, $d = 0, 4$, $\alpha = 2, 2$. En rouge $\nu_u^+(s, p\lambda_-(s))$, en bleu, $\nu_u^-(s, p\lambda_-(s))$, en vert, $p\nu_v^-(s, \lambda_-(s))$, et en jaune $p\nu_v^+(s, \lambda_-(s))$. Les deux lignes bleues en pointillés représentent $s = 2$ et $s = 2\sqrt{d\alpha}$. La ligne noire représente $s = s_{anorm}$. À droite de cette ligne, on a $\text{Re}(\lambda_-(s)) \leq 0$. Bien qu'on ait $\nu_u^+ = p\nu_v^-$ pour $s < s_{anorm}$, on a seulement besoin de $\tilde{s}_{lin} \geq 2Y' = \sqrt{2}$, car au-delà de cette valeur on a $\nu_u^+ \neq p\nu_v^-$.

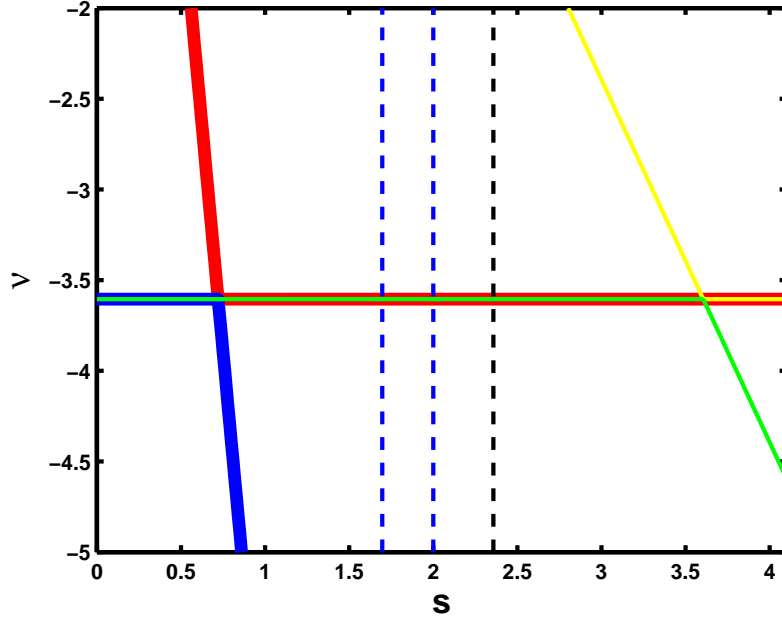


FIGURE 5.6 – Variations des racines $\nu_{u,v}^{\pm}$ en fonction de s pour les paramètres $p = 2$, $d = 0, 1$, $\alpha = 7, 2$. En rouge $\nu_u^+(s, p\lambda_-(s))$, en bleu, $\nu_u^-(s, p\lambda_-(s))$, en vert, $p\nu_v^-(s, \lambda_-(s))$, et en jaune $p\nu_v^+(s, \lambda_-(s))$. Les deux lignes bleues en pointillés représentent $s = 2$ et $s = 2\sqrt{d\alpha}$. La ligne noire représente $s = s_{anorm} \in]2Y'; 2dpY'[_$. A droite de cette ligne, on a $\text{Re}(\lambda_-(s)) \leq 0$. D'après la définition de \tilde{s}_{lin} , on voit qu'il faut exactement avoir $\tilde{s}_{lin} \geq s_{anorm}$.

Enfin, on dispose d'une autre expression pour s_{anorm} :

$$\begin{aligned}
& \left(dp\sqrt{Y} + \frac{\alpha}{p}\sqrt{\frac{1}{Y}} \right) - \left(\sqrt{Y} + \sqrt{\frac{1}{Y}} \right), \\
&= \left(dp\sqrt{\frac{\alpha-p}{p-dp^2}} + \frac{\alpha}{p}\sqrt{\frac{p-dp^2}{\alpha-p}} \right) - \left(\sqrt{\frac{\alpha-p}{p-dp^2}} + \sqrt{\frac{p-dp^2}{\alpha-p}} \right), \\
&= -(1-dp)\sqrt{\frac{\alpha-p}{p(1-dp)}} + \left(\frac{\alpha}{p} - 1\right)\sqrt{\frac{p(1-dp)}{\alpha-p}}, \\
&= -\sqrt{\frac{(\alpha-p)(1-dp)}{p}} + \sqrt{\frac{(\alpha-1)(1-d)}{p}}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc on a bien $s_{anorm} = \sqrt{Y} + \sqrt{\frac{1}{Y}} = dp\sqrt{Y} + \frac{\alpha}{p}\sqrt{\frac{1}{Y}}$.

Résolution du cas 2 Grâce aux deux écritures de s_{anorm} , la condition $\max(2dp\sqrt{Y}, 2\sqrt{Y}) \leq s_{anorm}$ qui caractérise le cas 2 peut se traduire de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}
2\sqrt{Y} &\leq \sqrt{Y} + \frac{1}{\sqrt{Y}}, \\
\sqrt{Y} &\leq 1, \\
Y &\leq 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2dp\sqrt{Y} &\leq dp\sqrt{Y} + \frac{\alpha}{p\sqrt{Y}}, \\
dp\sqrt{Y} &\leq \frac{\alpha}{p\sqrt{Y}}, \\
Y &\leq \frac{\alpha}{dp^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on est dans le cas 2 si et seulement si $Y \leq \min(1, \frac{\alpha}{dp^2})$. Mais dans ce cas, la condition $s \geq \max(2dp\sqrt{Y}, 2\sqrt{Y})$ est nécessairement obtenue si

$$\begin{aligned}
s &\geq \max(2dp\sqrt{\frac{\alpha}{dp^2}}, 2\sqrt{1}), \\
&\geq \max(2\sqrt{d\alpha}, 2), \\
&\geq \max(s_{u,lin}, s_{v,lin}).
\end{aligned}$$

On voit que la vitesse linéaire vérifie déjà cette inégalité pour tous (d, α) . Il n'y a donc pas d'influence du cas 2 sur la vitesse anormale.

Cas 3 : Calcul de $\nu_u^\pm(s_{anorm}, 0)$ et $\nu_v^\pm(s_{anorm}, 0)$ On se replace dans le cas 3. On rappelle que pour (d, α) tels que $Y > 0$, on est dans le cas 3 si et seulement si

$$\begin{cases} (s_{anorm}, 0) \in \left\{ (s, X - s\sqrt{Y}) \mid s \in]2dpY; 2Y[\right\} & , \text{ si } Y > 0 \text{ et } d < 1/p, \\ (s_{anorm}, 0) \in \left\{ (s, X - s\sqrt{Y}) \mid s \in]2Y; 2dpY[\right\} & , \text{ si } Y > 0 \text{ et } d > 1/p, \end{cases}$$

avec la première ligne correspondant à des couples solutions de $\nu_u^+ = p\nu_v^-$ et la seconde à des couples solutions de $p\nu_v^+ = \nu_u^-$. On est donc dans le cas 3 si et seulement si

$$\begin{cases} \nu_u^+(s_{anorm}, 0) = p\nu_v^-(s_{anorm}, 0) & , \text{ si } Y > 0 \text{ et } d < 1/p, \\ p\nu_v^+(s_{anorm}, 0) = \nu_u^-(s_{anorm}, 0) & , \text{ si } Y > 0 \text{ et } d > 1/p, \end{cases}$$

à condition d'exclure les couples correspondant à $s_{anorm} \in \{2dpY, 2Y\}$, c'est-à-dire les courbes $\alpha = 2p - dp^2$ et $\alpha = \frac{dp^2}{2dp-1}$ d'après (5.9)-(5.10).

Calcul de $\nu_u^\pm(s_{anorm}, 0)$ et $\nu_v^\pm(s_{anorm}, 0)$ Etant donné que

$$\begin{aligned}
\{Y > 0\} \cap \{d < 1/p\} &= \{\alpha > p\} \cap \{d < 1/p\}, \\
\{Y > 0\} \cap \{d > 1/p\} &= \{\alpha < p\} \cap \{d > 1/p\},
\end{aligned}$$

on cherche donc les valeurs de (d, α) telles que l'on ait une des deux égalités :

$$\begin{cases} \nu_u^+(s_{anorm}, 0) = \nu_v^-(s_{anorm}, 0) & , \text{ si } \alpha > p \text{ et } d < 1/p, \\ \nu_v^+(s_{anorm}, 0) = \nu_u^-(s_{anorm}, 0) & , \text{ si } \alpha < p \text{ et } d > 1/p. \end{cases}$$

On peut alors calculer directement $\nu_u^\pm(s_{anorm}, 0)$ et $\nu_v^\pm(s_{anorm}, 0)$. A noter que comme $s_{anorm} \geq \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$, ces expressions sont bien réelles :

$$\begin{aligned}
2d\nu_u^\pm(s_{anorm}, 0) &= -s_{anorm} \pm \sqrt{s_{anorm} - 4d\alpha}, \\
&= -s_{anorm} \pm \sqrt{d^2p^2Y + \frac{\alpha^2}{p^2} \frac{1}{Y} + 2d\alpha - 4d\alpha}, \\
&= -s_{anorm} \pm \sqrt{d^2p^2Y + \frac{\alpha^2}{p^2} \frac{1}{Y} - 2d\alpha}, \\
&= -dp\sqrt{Y} - \frac{\alpha}{p} \frac{1}{\sqrt{Y}} \pm \sqrt{\left(dp\sqrt{Y} - \frac{\alpha}{p} \frac{1}{\sqrt{Y}}\right)^2}, \\
&= \begin{cases} -dp\sqrt{Y} - \frac{\alpha}{p} \frac{1}{\sqrt{Y}} \pm \left(dp\sqrt{Y} - \frac{\alpha}{p} \frac{1}{\sqrt{Y}}\right) & , \text{ si } dp\sqrt{Y} \geq \frac{\alpha}{p} \frac{1}{\sqrt{Y}}, \\ -dp\sqrt{Y} - \frac{\alpha}{p} \frac{1}{\sqrt{Y}} \mp \left(dp\sqrt{Y} - \frac{\alpha}{p} \frac{1}{\sqrt{Y}}\right) & , \text{ si } dp\sqrt{Y} \leq \frac{\alpha}{p} \frac{1}{\sqrt{Y}}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Si bien que l'on a :

$$\nu_u^+(s_{anorm}, 0) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{dp} \frac{1}{\sqrt{Y}} & , \text{ si } Y \geq \frac{\alpha}{dp^2}, \\ -p\sqrt{Y} & , \text{ si } Y \leq \frac{\alpha}{dp^2}, \end{cases} \quad \nu_u^-(s_{anorm}, 0) = \begin{cases} -p\sqrt{Y} & , \text{ si } Y \geq \frac{\alpha}{dp^2}, \\ -\frac{\alpha}{dp} \frac{1}{\sqrt{Y}} & , \text{ si } Y \leq \frac{\alpha}{dp^2}. \end{cases}$$

On peut refaire le même calcul pour ν_v^\pm en utilisant cette fois l'expression $s_{anorm} = \sqrt{Y} + \frac{1}{\sqrt{Y}}$. Cela revient à remplacer $\frac{\alpha}{p}$ et dp par 1, on a :

$$\nu_v^+(s_{anorm}, 0) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{Y}} & , \text{ si } Y \geq 1, \\ -\sqrt{Y} & , \text{ si } Y \leq 1, \end{cases} \quad \nu_v^-(s_{anorm}, 0) = \begin{cases} -\sqrt{Y} & , \text{ si } Y \geq 1, \\ -\frac{1}{\sqrt{Y}} & , \text{ si } Y \leq 1. \end{cases}$$

Résolution du cas 3 On regarde l'égalité $\nu_u^+ = p\nu_v^-$. On est alors dans les hypothèses $\alpha > p$ et $d < 1/p$. On cherche pour quelles valeurs de (d, α) on a $\nu_u^+(s_{anorm}, 0) = p\nu_v^-(s_{anorm}, 0)$. On peut réécrire les conditions $Y < 1$ et $Y > \frac{\alpha}{dp^2}$:

$$\begin{aligned}
Y &< 1, \\
\frac{\alpha - p}{p - dp^2} &< 1, \\
\alpha - p &< p - dp^2, \\
\alpha &< 2p - dp^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y &> \frac{\alpha}{dp^2}, \\
\frac{\alpha - p}{p - dp^2} &> \frac{\alpha}{dp^2}, \\
dp^2(\alpha - p) &> \alpha(p - dp^2), \\
\alpha(2dp^2 - p) &> dp^3.
\end{aligned}$$

A partir de là, si $0 < d \leq \frac{1}{2p}$, cette inégalité n'est jamais vérifiée. Finalement, on a $Y > \frac{\alpha}{dp^2}$ si et seulement si $d > \frac{1}{2p}$ et $\alpha > \frac{dp^2}{2dp-1}$. On vérifie que pour $\frac{1}{2p} < d < \frac{1}{p}$, on a toujours $2p - dp^2 < \frac{dp^2}{2dp-1}$. On dénombre ainsi trois cas possibles dans le cadran $\{d < 1/p, \alpha > p\}$:

- les valeurs (d, α) sont telles qu'on ait $\alpha < 2p - dp^2$, donc en particulier $\alpha < \frac{dp^2}{2dp-1}$ si $d > \frac{1}{2p}$. Alors on a $Y < 1$ et $Y < \frac{\alpha}{dp^2}$, ce qui donne $\nu_u^+(s_{anorm}, 0) = -p\sqrt{Y}$ et $p\nu_v^-(s_{anorm}, 0) = -p\frac{1}{\sqrt{Y}}$. Comme $0 < Y < 1$, ces deux valeurs ne sont jamais égales. Il n'y a donc pas de vitesse anormale dans ce cas.

- les valeurs (d, α) sont telles qu'on ait $d > \frac{1}{2p}$ et $\alpha > \frac{dp^2}{2dp-1}$, donc en particulier $\alpha > 2p - dp^2$. Alors on a $Y > 1$ et $Y > \frac{\alpha}{dp^2}$, ce qui donne $\nu_u^+(s_{anorm}, 0) = -\frac{\alpha}{dp} \frac{1}{\sqrt{Y}}$ et $p\nu_v^-(s_{anorm}, 0) = -p\sqrt{Y}$. Comme $Y > \frac{\alpha}{d}$, ces deux valeurs ne sont jamais égales. Il n'y a donc pas de vitesse anormale dans ce cas.
- les valeurs (d, α) sont telles qu'on ait $\alpha \geq 2 - d$, et $\alpha \leq \frac{dp^2}{2dp-1}$ si $d > \frac{1}{2p}$. Alors on a $1 \leq Y \leq \frac{\alpha}{dp^2}$, ce qui donne $\nu_u^+(s_{anorm}, 0) = -p\sqrt{Y}$ et $p\nu_v^-(s_{anorm}, 0) = -p\sqrt{Y}$. On a alors égalité.

L'étude est exactement la même pour ν_u^- et ν_v^+ dans le cadran $\{d > 1/p, \alpha < p\}$. Finalement, pour chaque cadran $\{d < 1/p, \alpha > p\}$ et $\{d > 1/p, \alpha < p\}$, on a besoin d'avoir $\tilde{s}_{lin} \geq s_{anorm}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \alpha \geq 2p - dp^2 & , \\ \alpha \leq \frac{dp^2}{2dp-1} & , \text{ si } d > \frac{1}{2p}. \end{cases}$$

Rappelons que pour être dans le cas 3, il faut avoir $\alpha \neq 2p - dp^2$ et $\alpha \neq \frac{dp^2}{2dp-1}$ d'après (5.9)-(5.10). Si on exclut ces valeurs, on a alors $s_{anorm} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$. On a donc $\tilde{s}_{lin} \geq s_{anorm}$ pour

$$\begin{cases} \alpha > 2p - dp^2 & , \\ \alpha < \frac{dp^2}{2dp-1} & , \text{ si } d > \frac{1}{2p}, \end{cases}$$

et la vitesse s_{anorm} est une vitesse anormale pour ces jeux de paramètres.

Conclusion - valeur de s_{lin}

Finalement, on a que, pour une valeur de (d, α) donnée, \tilde{s}_{lin} est égal au maximum des trois contributions $s_{u,lin}$, $s_{v,lin}$ et s_{anorm} , avec $s_{anorm} = 0$ si (d, α) ne respecte pas les conditions ci-dessus, et $s_{anorm} = \sqrt{Y} + \sqrt{\frac{1}{Y}}$ sinon. Comme $s_{anorm} \geq \max(s_{u,lin}, s_{v,lin})$, on obtient :

$$\tilde{s}_{lin} = \begin{cases} 2 & , \text{ si } \alpha < 2p - dp^2, \\ 2\sqrt{d\alpha} & , \text{ si } d > \frac{1}{2p} \text{ et } \alpha > \frac{dp^2}{2dp-1}, \\ s_{anorm} & , \text{ sinon,} \end{cases}$$

avec la vitesse anormale

$$\begin{aligned} s_{anorm} &= \sqrt{\frac{\alpha - p}{p - dp^2}} + \sqrt{\frac{p - dp^2}{\alpha - p}}, \\ &= dp\sqrt{\frac{\alpha - p}{p - dp^2}} + \frac{\alpha}{p}\sqrt{\frac{p - dp^2}{\alpha - p}}, \\ &> \max(2, 2\sqrt{d\alpha}). \end{aligned}$$

C'est bien exactement la valeur pour telle que pour tout $s < s_{lin}$, les couples (s, λ) solutions d'une des quatre équations (4.2)-(4.4) vérifient tous $\text{Re}(\lambda) > 0$. Cela termine la preuve.

Vitesse sélectionnée pour $p > 0$

La preuve du théorème 2 repose sur le fait que chaque composante du système (1.1) vérifie le principe de comparaison, ce qui permet de construire des sur- et des sous-solutions. On va d'abord montrer la borne supérieure.

Sur-solutions

Pour plus de lisibilité, on écrira $\nu_{u,v}(s)$, voire seulement $\nu_{u,v}$, à la place de $\nu_{u,v}(s, 0)$. De plus, pour cette section, on considère des domaines du diagramme (d, α) légèrement différents :

$$\begin{aligned}\tilde{\text{I}} &= \{\alpha < 2p - dp^2\}, \\ \tilde{\text{II}} &= \left\{d > \frac{1}{2p}, \alpha > \frac{dp^2}{2dp-1}\right\}, \\ \tilde{\text{III}} &= \left\{d < \frac{1}{p}\right\} \setminus (\tilde{\text{I}} \cup \tilde{\text{II}}), \\ \tilde{\text{IV}} &= \left\{d > \frac{1}{p}\right\} \setminus (\tilde{\text{I}} \cup \tilde{\text{II}}), \\ \tilde{\text{V}} &= \left(d = \frac{1}{p}, \alpha = p\right).\end{aligned}$$

On va construire des sur-solutions pour chaque domaine.

Lemme 5.1. *Pour tous $(d, \alpha) \in \tilde{\text{IV}}$, on a $s_{sel} \leq \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$.*

Preuve. On adapte la preuve présentée dans [7]. On considère $s > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$ et $(d, \alpha) \in \tilde{\text{IV}}$. Alors pour tout $C_v > 0$, une sur-solution pour la composante v est donnée par

$$\bar{v}(t, x) = \min(1, C_v e^{\nu_v^-(s)(x-st)}).$$

Comme on a pris $s > 2$, on a en effet :

$$\nu_v^-(s, 0) = -\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{s^2 - 4} \in \mathbb{R}_-^*.$$

Ainsi, si on regarde la quantité

$$N_v(\bar{v}(t, x)) := \bar{v}_t - \bar{v}_{xx} - \bar{v} + \bar{v}^2,$$

alors il est clair que, pour les (t, x) tels que $C_v e^{\nu_v^-(s)(x-st)} > 1$, on a $N_v(\bar{v}(t, x)) = -1 + 1 = 0$. Dans le cas contraire, on a

$$\begin{aligned}N_v(\bar{v}(t, x)) &= C_v e^{\nu_v^-(s)(x-st)} \left[-s\nu_v^- - (\nu_v^-)^2 - 1 + C_v e^{\nu_v^-(s)(x-st)}\right], \\ &= C_v^2 e^{2\nu_v^-(s)(x-st)} > 0,\end{aligned}$$

car $D_v(\nu_v^-) = (\nu_v^-)^2 + s\nu_v^- + 1 = 0$. De plus, \bar{v} est également une sur-solution au point de non différentiabilité $y = y_v = -\frac{1}{\nu_v^-(s)} \log(C_v)$ car

$$0 = \lim_{y \rightarrow y_v^-} \partial_y \bar{v} > \lim_{y \rightarrow y_v^+} \partial_y \bar{v} \in \mathbb{R}_-^*.$$

Enfin, on sait que

$$\bar{v}(t = 0, x) = \begin{cases} 1 & , x \leq y_v, \\ C_v e^{\nu_v^-(s)x} & , x \geq y_v. \end{cases}$$

Ainsi, comme y_v est une fonction croissante de C_v , et comme $v_0(x) \in]0, 1[$ est une perturbation à support compact de $\mathbf{1}_{x \leq 0}$, il existe $C_v > 0$ suffisamment grand pour que $v_0(x) \leq \bar{v}(0, x)$. On a donc toujours $v(t, x) \leq \bar{v}(t, x)$ pour tout $s > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$.

On va construire une sur-solution pour u de la même manière. On considère

$$N_u(u) = u_t - du_{xx} - f(u) - \beta v^p(1 - u) + \alpha u^2.$$

On cherche $\bar{u}(t, x)$ tel que $N_u(\bar{u}) \geq 0$ pour tous $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$. On pose cette fois :

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} 1 & , x - st \leq \tau, \\ C_u e^{\nu_u^-(x-st)} + C_v \kappa e^{p\nu_v^-(x-st)} & , x - st > \tau. \end{cases}$$

La démarche est que pour tout $C_v > 0$ (qui correspond à celle qu'on a prise pour v), il existe $C_u^*(C_v) > 0$ tel que pour tout $C_u > C_u^*$ il existe $\tau(C_u, C_v)$ tels que \bar{u} soit une sursolution. On vérifie aisément que pour tout τ , si $x - st \leq \tau$, on a $N_u(\bar{u}) = N_u(\mathbf{1}) = 0$. Dans le cas contraire $x - st > \tau$, on obtient, en admettant que $\bar{u} \in [0; 1]$:

$$\begin{aligned} N_u(\bar{u}) &= \bar{u}_t - d\bar{u}_{xx} - f(\bar{u}) - \beta v^p(1 - \bar{u}) + \alpha \bar{u}^2, \\ &\geq \bar{u}_t - d\bar{u}_{xx} - \alpha \bar{u} - [\beta \bar{v}^p - \beta v^p] - \beta v^p + \beta v^p \bar{u} + \alpha \bar{u}^2, \\ &\geq \left[\bar{u}_t - d\bar{u}_{xx} - \alpha \bar{u} - \beta C_v e^{p\nu_v^-(x-st)} \right] + [\beta(\bar{v}^p - v^p) + \beta v^p \bar{u} + \alpha \bar{u}^2], \end{aligned}$$

avec la dernière inégalité qui n'est vraie que pour $C_v e^{\nu_v^-(x-st)} \leq 1$, soit $x - st \geq y_v$, ce qu'on pourra avoir si on choisit $\tau > y_v$.

Si on considère l'équation

$$u_t = du_{xx} + \alpha u + \beta C_v e^{p\nu_v^-(x-st)},$$

on voit qu'elle admet pour solution avec un certain κ :

$$\tilde{u}(t, x) = C_u e^{\nu_u^-(x-st)} + C_v \kappa e^{p\nu_v^-(x-st)}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \tilde{u}_t - d\tilde{u}_{xx} - \alpha \tilde{u} &= (-\nu_u^- s - d\nu_u^{-2} - \alpha) C_u e^{\nu_u^-(x-st)}, \\ &\quad + (-p\nu_v^- s - d(p\nu_v^-)^2 - \alpha) C_v \kappa e^{p\nu_v^-(x-st)}, \\ &= -D_u(p\nu_v^-(s, \lambda = 0)) \cdot C_v \kappa e^{p\nu_v^-(x-st)}, \end{aligned}$$

Donc on a bien le résultat pour

$$\kappa = \frac{-\beta}{D_u(p\nu_v^-)} = \frac{-\beta}{d(p\nu_v^-)^2 + sp\nu_v^- + \alpha}.$$

Comme $\beta > 0$, on peut en déduire que $\kappa < 0$:

$$\begin{aligned} D_u(p\nu_v^-) &= dp^2 \left(-\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - 1} \right)^2 + sp \left(-\frac{s}{2} - \sqrt{\frac{s^2}{4} - 1} \right) + \alpha, \\ &= \frac{s^2}{4} dp^2 + \left(\frac{s^2}{4} - 1 \right) dp^2 + s\sqrt{\frac{s^2}{4} - 1} dp^2 - \frac{s^2}{2} p - sp\sqrt{\frac{s^2}{4} - 1} + \alpha, \\ &= \frac{s^2}{2} (dp^2 - p) + s\sqrt{\frac{s^2}{4} - 1} (dp^2 - p) + \alpha - dp^2. \end{aligned}$$

Or, comme $d > \frac{1}{p}$ et $s > 2$, on a

$$\begin{aligned} D_u(p\nu_v^-) &> \frac{2^2}{2} (dp^2 - p) + \alpha - dp^2, \\ &= dp^2 - 2p + \alpha, \end{aligned}$$

étant donné que $\alpha \geq 2p - dp^2$, on a bien $D_u(p\nu_v^-) > 0$, donc $\kappa < 0$.

Ainsi, le premier crochet de l'expression de $N_u(\bar{u})$ est nul si $\tau > y_v$ et $\bar{u} \in [0; 1]$. On va montrer ce dernier point. Tout d'abord, on a $p\nu_v^- < \nu_u^-$. En effet, $D_u(p\nu_v^-) > 0$ implique que $p\nu_v^- < \nu_u^-$ ou $\nu_u^+ < p\nu_v^-$. Cependant, le second cas est impossible, puisqu'on a $p\nu_v^- \rightarrow -\infty$ et $\nu_u^+ \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$. On aurait donc existence d'une vitesse s telle que

$p\nu_v^-(s, 0) = \nu_u^+(s, 0)$. Or, on a vu que cela ne pouvait arriver que dans le cadran $\{d < 1/p, \alpha > p\}$, donc pas dans le domaine $\tilde{\text{IV}}$. Donc $p\nu_v^- < \nu_u^- < 0$. Cela implique que $\tilde{u}(t, x) > 0$ pour x assez grand. On cherche maintenant le maximum de $\tilde{u}(t, x)$ pour $x - st \in \mathbb{R}$. Or, étant donné que $p\nu_v^- < \nu_u^- < 0$, \tilde{u}_x ne s'annule qu'en un point et ce point est un maximum pour \tilde{u} :

$$x - st = y_{max} := -\frac{1}{\nu_u^- - p\nu_v^-} \log \left(\frac{-C_u \nu_u^-}{C_v \kappa p \nu_v^-} \right).$$

Ainsi, si \tilde{u} devait s'annuler en un point, comme il est strictement positif pour de larges valeurs de x , sa dérivée devrait s'annuler en un minimum pour \tilde{u} . Comme ce n'est pas le cas, on en déduit que $\tilde{u} > 0$, donc que $\bar{u} > 0$.

Maintenant, quand $C_u \rightarrow +\infty$, on a $y_{max} \rightarrow -\infty$. Donc il existe $C_u^*(C_v) > 0$ tel que pour tout $C_u > C_u^*$, les conditions suivantes soient satisfaites :

- $\xi_{max} < y_v(C_v)$,
- $\tilde{u}(t, y_{max} + st) \geq \tilde{u}(t, y_v + st) > 1$.

Alors, comme $\tilde{u}(t, x) \rightarrow 0^+$ quand $x \rightarrow +\infty$, il existe $\tau(C_u, C_v) > y_v$ tel que $\tilde{u}(t, \tau + st) = 1$. Cela garantit la continuité de \bar{u} . Comme $\tilde{u}_x < 0$ pour $x - st > y_{max}$, on a $\tilde{u} < 1$ pour $x - st > \tau$. Avec un tel choix de C_u et τ , on a $\bar{u} \in [0; 1]$.

De plus, comme $\bar{v} \geq v$, le second crochet de $N_u(\bar{u})$ est positif. Ainsi, $N_u(\bar{u})$ est positif pour tous (t, x) . On vérifie également que \bar{u} est une sur-solution au point $x - st = \tau$.

Enfin, pour une condition initiale $u_0(x) \in [0; 1]$ qui est une perturbation à support compact de $\mathbf{1}_{x \leq 0}$, on peut prendre C_u^* encore plus grand si besoin pour garantir que $\bar{u}(0, x) \geq u(0, x)$. Alors on a bien $\bar{u}(t, x) \geq u(t, x)$ pour tous $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Comme \bar{u} se propage vers la droite à la vitesse s , la vitesse sélectionnée vérifie $s_{sel} \leq s$. Cette construction est valide pour tout $s > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$. Cela termine la preuve. \blacksquare

Cette première preuve a été très détaillée. Les suivantes seront plus brèves et reprendront des éléments de la première.

Lemme 5.2. *Pour tous $(d, \alpha) \in \tilde{\text{II}}$, on a $\tilde{s}_{sel} \leq 2\sqrt{d\alpha}$.*

Preuve. On peut refaire la même preuve que précédemment, en posant $s > 2\sqrt{d\alpha} > 2$. On doit seulement s'assurer que $p\nu_v^-(s) < \nu_u^-(s) < 0$, ce qui implique $D_u(p\nu_v^-) > 0$. Ainsi, pour avoir la même preuve, il suffit d'avoir :

$$p\nu_v^-(2\sqrt{d\alpha}) < \nu_u^-(2\sqrt{d\alpha}).$$

En effet, si s est pris suffisamment proche de $2\sqrt{d\alpha}$, on aura aussi

$$p\nu_v^-(s) < \nu_u^-(s),$$

et la même preuve s'ensuit. On sait que $\nu_u^-(2\sqrt{d\alpha}) = -\frac{2\sqrt{d\alpha}}{d} = -2\sqrt{\frac{\alpha}{d}}$. On résout :

$$\begin{aligned} p\nu_v^-(2\sqrt{d\alpha}) &= -p\sqrt{d\alpha} - p\sqrt{d\alpha - 1} < -\sqrt{\frac{\alpha}{d}}, \\ \sqrt{1 - \frac{1}{d\alpha}} &> \frac{1}{dp} - 1. \end{aligned}$$

Pour $(d, \alpha) \in \tilde{\text{II}}$, comme on a exclu le point $(d = 1/p, \alpha = p)$, on est toujours au-dessus de la courbe $\alpha = 1/d$. On le voit bien pour $d > 1/p$ sur la Figure 4.1. Ainsi, $d\alpha > 1$ et le membre de gauche est strictement positif. Si $d \geq 1/p$, l'inégalité est vraie et on a le résultat. Si $d < 1/p$, on a

$$\begin{aligned} dp\sqrt{1 - \frac{1}{d\alpha}} &> 1 - dp > 0, \\ d^2p^2 \left(1 - \frac{1}{d\alpha}\right) &> 1 - 2dp + d^2p^2, \\ -\frac{dp^2}{\alpha} &> 1 - 2dp. \end{aligned}$$

On rappelle que $d > 1/(2p)$ pour $(d, \alpha) \in \widetilde{\text{II}}$. On en déduit que $1 - 2dp < 0$. On obtient alors

$$\begin{aligned} dp^2 &< (2dp - 1)\alpha, \\ \alpha &> \frac{dp^2}{2dp - 1}. \end{aligned}$$

On est bien dans ce cas pour $(d, \alpha) \in \widetilde{\text{II}}$. On en déduit que $s_{sel} \leq 2\sqrt{d\alpha}$ pour $(d, \alpha) \in \widetilde{\text{II}}$. \blacksquare

A noter qu'exclure le point $\alpha = 1/d = p$ était nécessaire pour la preuve. C'est en partie pour cette raison qu'on a dû définir un domaine \widetilde{V} .

Lemme 5.3. *Pour tous $(d, \alpha) \in \widetilde{\text{III}}$, on a $\tilde{s}_{sel} \leq s_{anorm}$.*

Preuve. La preuve est similaire à celle présentée dans [8]. On pose $s > s_{anorm} > \max(2, 2\sqrt{d\alpha})$. Alors, de même que la preuve du lemme 5.1, on peut choisir $C_v > 0$ de telle sorte que

$$\bar{v}(t, x) = \min(1, C_v e^{\nu_v^-(s)(x-st)}),$$

soit une sur-solution et satisfasse $\bar{v}(t, x) \geq v(t, x)$. On notera que \bar{v} change d'expression au point $x - st = y_v = -\frac{1}{\nu_v} \log(C_v)$.

On s'intéresse maintenant à la composante u . On va prouver qu'il existe $C_u^*(C_v)$ tel que pour tout $C_u > C_u^*$ il existe un $\tau(C_u, C_v)$ pour lequel

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} 1 & , x - st \leq \tau, \\ C_u e^{\nu_u^+(s)(x-st)} + \kappa C_v e^{p\nu_v^-(s)(x-st)} & , x - st \geq \tau, \end{cases}$$

est une sur-solution pour la composante u , avec

$$\kappa = \frac{-\beta}{D_u(p\nu_v^-)}.$$

On rappelle que $\widetilde{\text{III}}$ est le domaine pertinent. Ainsi, on a vu que $\nu_u^+(s_{anorm}) = p\nu_v^-(s_{anorm})$ sur ce domaine. Etant donné que $\nu_u^+(s)$ croît avec s et que $\nu_v^-(s)$ décroît, on en déduit que $p\nu_v^-(s) < \nu_u^+(s) < 0$. On va prouver que $D_u(p\nu_v^-) < 0$, donc que $\kappa > 0$.

On a vu pour le calcul de \tilde{s}_{lin} que $s_{anorm} > 2\sqrt{d\alpha}$ sauf le long de la courbe $\alpha = dp^2/(2dp - 1)$. Pour les points de $\widetilde{\text{III}}$ qui ne sont pas sur cette courbe, on a

$$\begin{aligned} \nu_u^-(s_{anorm}) &= -\frac{s_{anorm}}{2d} - \sqrt{s_{anorm}^2 - 4d\alpha}, \\ &< -\frac{s_{anorm}}{2d} + \sqrt{s_{anorm}^2 - 4d\alpha}, \\ &= \nu_u^+(s_{anorm}). \end{aligned}$$

Comme $\nu_u^-(s_{anorm}) < p\nu_v^-(s_{anorm}) = \nu_u^+(s_{anorm})$, on en déduit que pour des valeurs de s suffisamment proches de s_{anorm} , on a $\nu_u^- < p\nu_v^- < \nu_u^+$, donc que $D_u(p\nu_v^-) < 0$. Pour les points situés sur la courbe $\alpha = dp^2/(2dp - 1)$, on a $\nu_u^+(s_{anorm}) = \nu_u^-(s_{anorm}) = p\nu_v^-(s_{anorm})$ et $s_{anorm} = 2\sqrt{d\alpha} > 2$, vu que $\alpha = 1/d = p$ a été exclu de $\widetilde{\text{III}}$. Mais on peut montrer que

$$\begin{aligned} \partial_s \nu_v^-(s) &= -\frac{1}{2} - \frac{s}{s-2}, \\ \partial_s \nu_v^-(2\sqrt{d\alpha}) &= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{d\alpha}}{\sqrt{d\alpha} - 1} \in]-\infty; 0[, \\ \partial_s \nu_u^\pm &\xrightarrow{s \rightarrow 2\sqrt{d\alpha}} \pm\infty. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que pour des valeurs de s proches de $s_{anorm} = 2\sqrt{d\alpha}$, on a encore $\nu_u^- < p\nu_v^- < \nu_u^+$.

Vu que $\kappa > 0$, il est clair que \bar{u} est une fonction positive, décroissante, qui tend vers l'infini quand $x - st \rightarrow -\infty$ et vers zéro quand $x - st \rightarrow \infty$. On peut alors choisir τ comme l'unique valeur qui rend \bar{u} continue. Ensuite, on choisit C_u^* suffisamment grand de telle sorte que pour tout $C_u > C_u^*$ on a $\tau > y_v(C_v)$ et $\bar{u}(0, x) > u(0, x)$.

On vérifie similairement au lemme 5.1 que $N_u(\bar{u}) \geq 0$ pour tous (t, x) et que \bar{u} est une sur-solution au point $x - st = \tau$.

Finalement, on a $u(t, x) \leq \bar{u}(t, x)$ pour tous (t, x) . Comme \bar{u} se propage vers la droite à la vitesse s , on en déduit $s_{sel} \leq s$. Une telle construction est valide pour tout $s > s_{anorm}$, donc $s_{sel} \leq s_{anorm}$ pour $(d, \alpha) \in \widetilde{\text{III}}$. ■

Bien que sur la courbe $\alpha = \frac{dp^2}{2dp-1}$, s_{anorm} ne soit pas une vitesse anormale à proprement parler, puisqu'égale à $2\sqrt{d\alpha}$, la preuve ci-dessus reste valide. L'expression de s_{anorm} peut en fait être définie sur les cadrans $\{d < 1/p, \alpha > p\}$ et $\{d > 1/p, \alpha < p\}$.

Lemme 5.4. *Pour tous $(d, \alpha) \in \widetilde{\text{I}}$, on a $s_{sel} \leq s_{anorm}$.*

Preuve. On peut refaire la même preuve que pour le lemme précédent, en posant $s > 2 > 2\sqrt{d\alpha}$. On doit simplement s'assurer que $p\nu_v^-(s) < \nu_u^+(s)$ et $D_u(p\nu_v^-) < 0$. Il suffit donc d'avoir

$$\nu_u^+(2) \geq p\nu_v^-(2) > \nu_u^-(2).$$

En effet, comme ν_u^+ croît avec s et ν_v^- décroît avec s , si s est suffisamment proche de 2, on a

$$\nu_u^+(s) > p\nu_v^-(s) > \nu_u^-(s).$$

et la même preuve s'ensuit. On sait que $p\nu_v^-(2) = -p$. On résout donc

$$\begin{aligned} \nu_u^+(2) = \frac{1}{d} \left(-1 + \sqrt{1 - d\alpha} \right) &\geq -p, \\ \sqrt{1 - d\alpha} &\geq 1 - dp, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_u^-(2) = \frac{1}{d} \left(-1 - \sqrt{1 - d\alpha} \right) &< -p, \\ \sqrt{1 - d\alpha} &> dp - 1. \end{aligned}$$

On rappelle que $d\alpha < 1$ pour $(d, \alpha) \in \widetilde{\text{I}}$. On s'intéresse à la première inégalité. Si $d \geq 1/p$, elle est toujours vraie. Sinon, on obtient la condition

$$\begin{aligned} 1 - d\alpha &\geq 1 - 2dp + d^2p^2, \\ \alpha &\leq 2p - dp^2, \end{aligned}$$

qui est bien vérifiée pour $(d, \alpha) \in \widetilde{\text{I}}$. Pour la seconde inégalité, si $d \leq 1/p$, elle est toujours vraie. Sinon, on obtient la condition

$$\begin{aligned} 1 - d\alpha &> d^2p^2 - 2dp + 1, \\ \alpha &< 2p - dp^2, \end{aligned}$$

qui est là encore toujours vraie pour $(d, \alpha) \in \widetilde{\text{I}}$. On en déduit que $s_{sel} \leq 2$ pour tous $(d, \alpha) \in \widetilde{\text{I}}$. ■

A noter que la même preuve ne marche pas pour $(d, \alpha) \in \{d > 1/p, \alpha = 2p - dp^2\}$. En effet, pour ces valeurs, on a $\nu_u^+(s_{anorm}) = p\nu_v^-(s_{anorm})$ et $s_{anorm} = 2$. Ainsi, on a $\nu_u^+(2) = p\nu_v^-(2) = \nu_u^-(2)$. Comme $2\sqrt{d\alpha} < 2$, $p\nu_v^-(s)$ a une tangente verticale dirigée vers $-\infty$. Donc $\nu_u^-(s) > p\nu_v^-(s)$ quand $s \rightarrow 2$. C'est pourquoi l'on a retiré cette courbe du domaine $\widetilde{\text{I}}$. On rappelle que cette courbe a été traitée avec le domaine $\widetilde{\text{IV}}$.

Lemme 5.5. *Pour $(d = 1/p, \alpha = p) \in \tilde{V}$, on a $s_{sel} \leq 2 = 2\sqrt{d\alpha}$.*

Preuve. Comme $\alpha = 1/d = p$, on a $\nu_u^\pm = p\nu_v^\pm$ pour tout s . Alors aucune des preuves précédentes ne fonctionnent puisqu'on a toujours $D_u(p\nu_v) = 0$. On peut toutefois construire une sur-solution similaire.

On pose $s > 2$, et $\nu_v(s) = -\frac{s}{2} \in]\nu_v^-(s), \nu_v^+(s)[$. Comme $D_v(\nu_v) < 0$, la fonction

$$\bar{v}(t, x) = \min(1, C_v e^{\nu_v(s)(x-st)}),$$

est toujours une sur-solution de v pour tout $C_v > 0$. En choisissant C_v suffisamment grand, on a aussi $v(t, x) \leq \bar{v}(t, x)$ pour tous (t, x) . On a aussi, pour tout $s > 2 = 2\sqrt{d\alpha}$,

$$\nu_u^-(s) < p\nu_v(s) < \nu_u^+(s).$$

Ainsi $D_u(p\nu_v) < 0$. Soit

$$\bar{u}(t, x) = \begin{cases} 1 & , x - st \leq \tau, \\ C_u e^{\nu_u^+(s)(x-st)} + \kappa C_v e^{p\nu_v(s)(x-st)} & , x - st \geq \tau. \end{cases}$$

On peut refaire la même preuve que pour $(d, \alpha) \in \tilde{\text{III}}$. Ainsi, $s_{sel} \leq 2 = 2\sqrt{d\alpha}$ pour $(d, \alpha) \in \tilde{V}$. ■

On a ainsi prouvé la borne supérieure du théorème 2. On voit que ces preuves reposent énormément

Sous-solutions

On revient aux domaines I-IV définis par (4.7). Afin d'avoir la borne inférieure 2, on va prouver que $s_{sel} \geq 2$ et $s_{sel} \geq 2\sqrt{d\alpha}$ pour tous (d, α) , puis que $s_{sel} \geq s_{anorm}$ pour $(d, \alpha) \in \text{III}$.

Lemme 5.6. *Pour tous (d, α) , on a $s_{sel} \geq 2\sqrt{d\alpha}$.*

Preuve. On considère l'équation u isolée, c'est-à-dire

$$\begin{cases} u_t = du_{xx} + f(u), \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (5.11)$$

On sait que pour notre condition initiale u_0 , la solution \underline{u} du problème de Cauchy (5.11) se propage asymptotiquement à une vitesse $2\sqrt{d\alpha}$. On peut utiliser \underline{u} comme une sous-solution pour le système (1.1) :

$$\begin{aligned} N_u(\underline{u}) &= \underline{u}_t - d\underline{u}_{xx} - f(\underline{u}) - \beta v^p(1 - \underline{u}), \\ &= -\beta v^p(1 - \underline{u}) < 0, \end{aligned}$$

étant donné que $\underline{u} \in [0; 1]$ en vertu du principe de comparaison. On a de manière évidente $\underline{u}(0, x) \leq u_0(x)$, on a donc $\underline{u}(t, x) \leq u(t, x)$ pour tous (t, x) . On en déduit que $s_{sel} \geq 2\sqrt{d\alpha}$ pour tous (d, α) . ■

Bien que dans le lemme précédent on a construit une sous-solution en supprimant le couplage, on verra que celui-ci est essentiel pour le lemme suivant.

Lemme 5.7. *Pour tous (d, α) , on a $s_{sel} \geq 2$.*

Preuve. Il y a plusieurs façons de le prouver. On présente ici une preuve trouvée au cours du stage. On pose $s < 2$. On définit la fonction suivante en fonction de $y = x - st$:

$$\psi(y) = 1 - \text{Ach}(B(y - C)),$$

avec $A \in]0; 1[$, $B > 0$ et $C \in \mathbb{R}$. Le maximum de ψ est $\psi(C) = 1 - A < 1$, et il existe $y_+ > C$ tel que

$$\begin{aligned}\psi(y_+) &= 0, \\ \psi_y(y_+) = \psi_x(y_+) &< 0.\end{aligned}$$

En fait, on a

$$y_+ = \frac{\text{Argch}(1/A)}{B} + C.$$

Ainsi, on peut définir une fonction continue par

$$\underline{u}(t, x) = \underline{u}(y) = \begin{cases} 1 - A & , y \leq C, \\ \psi(y) & , C \leq y \leq y_+, \\ 0 & , y \geq y_+.\end{cases}$$

Il est évident que \underline{u} est une sous-solution quand $y \notin]C, y_+[$, y compris en les points de non différentiabilité $y = C$ et $y = y_+$, puisque

$$\begin{aligned}\lim_{y \rightarrow C^-} \partial_y \underline{u} &= \lim_{y \rightarrow C^+} \partial_y \underline{u}, \\ \lim_{y \rightarrow y_+^-} \partial_y \underline{u} &< \lim_{y \rightarrow y_+^+} \partial_y \underline{u}.\end{aligned}$$

Ensuite, comme $f(\underline{u}) \geq 0$, on montre que

$$\begin{aligned}N_u(\underline{u}) &= \underline{u}_t - d\underline{u}_{yy} - s\underline{u}_y - f(\underline{u}) - \beta v^p(1 - \underline{u}), \\ &\leq [dB^2 - \beta v^p] \text{Ach}(B(y - C)) + sAB\text{sh}(B(y - C)), \\ &\leq [dB^2 + sB - \beta v^p] \text{Ach}(B(y - C)),\end{aligned}$$

avec $\underline{v} \leq v$ une sous-solution de l'équation en v . On doit donc avoir $dB^2 + sB - \beta v^p(t, y) \leq 0$ quand $y \in [C, y_+]$.

Comme $s < 2$, d'après l'étude du portrait de phase réalisée en section (2.1), il existe un profil $V_s(x - st)$ solution de l'équation en v qui oscille autour de 0 quand $x - st \rightarrow \infty$. La situation est similaire à celle représentée Figure (2.1). Ainsi, $V_s(x - st)$ atteint la valeur 0 pour des valeurs $x - st$ finies. Soit Θ le premier zéro de $V_s(x - st)$. On définit alors

$$\underline{v}(x - st) = \begin{cases} V_s(x - st) & , x - st \leq \Theta, \\ 0 & , x - st \geq \Theta.\end{cases}$$

Il est clair que c'est une sous-solution pour $x - st \geq \Theta$. Pour $x - st \leq \Theta$, on a

$$\begin{aligned}N_v(\underline{v}) &= \underline{v}_t - \underline{v}_{xx} - \underline{v}(1 - \underline{v}), \\ &= -sV_s' - V_s'' - V_s(1 - V_s), \\ &= 0.\end{aligned}$$

L'étude du portrait de phase montre aussi que $\underline{v}_x(\Theta^-) < 0 = \underline{v}_x(\Theta^+)$. C'est donc aussi une sous-solution au point de non différentiabilité $x - st = \Theta$. Enfin, il reste à vérifier que $\underline{v}(x) \leq v_0(x)$. D'une part, il est clair que pour $x - st \leq \Theta$, on a $V_s(x - st) \in [0; 1]$. D'autre part, l'étude du portrait de phase montre que, à s fixé, le profil V_s est unique à translation près. Plus précisément, dans tout ce qui a été fait plus haut, on peut remplacer $V_s(x - st)$ par $V_s(x - st - m)$, avec $m \in \mathbb{R}$. Cela revient en fait à pouvoir choisir arbitrairement la valeur de Θ . Vu que v_0 est une perturbation à support compact de $\mathbf{1}_{x \leq 0}$, il suffit de prendre Θ suffisamment négatif pour que $v_0(x) = 1$ pour tout $x \leq \Theta$. Comme $v_0(x) \geq 0$, on aura donc $v_0(x) \geq \underline{v}(x)$. On en déduit que $\underline{v}(x - st) \leq v(t, x)$ pour tous (t, x) et on peut le reporter dans l'expression de $N_u(\underline{u})$.

Pour que \underline{u} soit une sous-solution, il faut avoir $dB^2 + sB - \beta\underline{v}^p \leq 0$ pour $y = x - st \in [C; y_+]$. Tout d'abord, les paramètres d, s, β, p étant fixés, il est clair qu'on peut choisir $B > 0$ suffisamment petit pour que

$$dB^2 + sB - \beta \left(\frac{1}{2}\right)^p \leq 0.$$

Ensuite, comme $V_s(y) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} 1$, il existe $y_0(s) < 0$ tel que $V_s(y) \geq \frac{1}{2}$ dès que $y \leq y_0$. Ainsi, il reste à prouver qu'on peut choisir $y_+ \leq y_0$ et la preuve sera terminée. Bien qu'on ait fixé B , on a $y_+ \rightarrow -\infty$ quand $C \rightarrow -\infty$. Comme y_0 ne dépend pas de C , on a bien le résultat. Donc \underline{u} est une sous-solution.

Enfin, on doit vérifier que $\underline{u}(0, x) \leq u_0(x)$. Comme $\underline{u} \leq 1 - A$, $y_+ < 0$, et $\underline{u} = 0$ en dehors de $(-\infty, y_+)$, on peut choisir C encore plus négatif si besoin, pour s'assurer que $u_0(x) = 1 > 1 - A \geq \underline{u}(x)$ pour $x \leq y_+$. Finalement, on a $\underline{u}(x - st) \leq u(t, x)$ pour tous (t, x) .

Ainsi, pour tout $s < 2$, pour tout seuil $h \in (0, 1 - A)$, on peut construire une sous-solution \underline{u} qui se propage à la vitesse s . Comme on peut choisir A arbitrairement proche de 0, on a $s_{sel} \geq s$. La preuve est valide pour tout $s < 2$, donc $s_{sel} \geq 2$. Cela termine la preuve. \blacksquare

La dernière sous-solution à construire est sensiblement plus compliquée. Comme il s'agit de montrer l'existence d'une vitesse anormale $s_{sel} \geq s_{anorm}$, il faut des résultats plus fins. La preuve est adaptée de [8]. Dans un premier temps, on va construire une sous-solution de l'équation \underline{v} pour un domaine réduit des valeurs (t, x) . C'est l'objet des deux lemmes suivants :

Lemme 5.8. *Pour tout $\sigma > 2$, si on pose $y = x - \sigma t$, et si on se donne $q_0(y) : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0; 1]$ à support compact, alors il existe une fonction $G(t, y)$ avec $|G(t, y)| < C$ pour un $C(\sigma, q_0) > 0$ telle que*

$$q(t, y) = e^{(1 - \frac{\sigma^2}{4})t - \frac{\sigma}{2}y - \frac{y^2}{4t}} G(t, y)$$

est une sous-solution de la composante v pour $t, y \in \mathbb{R}_+$.

Preuve. On travaille dans un référentiel $y = x - \sigma t$. Une fonction $q(t, y)$ est une sous-solution pour $(t, y) \in \mathbb{R}_+$ si $N_v(q) = q_t - q_{yy} - \sigma q_y - q + q^2 \leq 0$. On considère le problème à valeur initiale de l'équation en v linéarisée autour de $(0, 0)$ avec une condition aux bord de Dirichlet imposée en $y = 0$:

$$\begin{cases} \tilde{q}_t = \tilde{q}_{yy} + \sigma \tilde{q}_y + \tilde{q} & , (t, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \\ \tilde{q}(0, y) = \tilde{q}_0(y) & , y \in \mathbb{R}_+, \\ \tilde{q}(t, 0) = 0 & , t > 0. \end{cases}$$

Si on suppose que $\tilde{q}_0(y)$ est à support compact, cette équation a une solution explicite, obtenue à partir d'un noyau gaussien :

$$\tilde{q}(t, y) = e^{(1 - \frac{\sigma^2}{4})t - \frac{\sigma}{2}y} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(y-y')^2}{4t}} - e^{-\frac{(y+y')^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \tilde{q}_0(y') dy'. \quad (5.12)$$

Comme $\tilde{q}(t, y)$ est solution de l'équation linéarisée ce n'est pas une sous-solution car $N(\tilde{q}) = \tilde{q}^2 \geq 0$. Cependant, on peut construire une fonction $A(t) \geq 0$ telle que $q(t, y) = A(t)\tilde{q}(t, y)$ soit une sous-solution. Etant donné que l'on peut majorer les deux exponentielles dans l'intégrale par 2 en valeur absolue, et que le reste est une fonction décroissante de t et de y , on en déduit que $|\tilde{q}(t, y)| < Ce^{-\omega t}$ pour un certain $\omega > 0$ et un certain $C(q_0)$ indépendant de y . Si de plus on a

$$A'(t) = -Ce^{-\omega t} A(t)^2,$$

alors

$$\begin{aligned}
N(q) &= q_t - q_{yy} - \sigma q_y - q + q^2, \\
&= A' \tilde{q} + A(\tilde{q} - \tilde{q}_{yy} - \sigma \tilde{q}_y - \tilde{q}) + A^2 \tilde{q}^2, \\
&= A' \tilde{q} + A^2 \tilde{q}^2, \\
&< A' C e^{-\omega t} + A^2 C^2 e^{-2\omega t}, \\
&= 0.
\end{aligned}$$

donc $q(t, y)$ est bien une sous-solution. On peut calculer explicitement A :

$$A(t) = \frac{A_0 \omega}{\omega + C A_0 (1 - e^{-\omega t})}.$$

On peut par exemple prendre $A_0 = 1$, et on obtient qu'il existe $A_1 > 0$ tel que pour tout $t > 0$, $A_1 < A(t) < 1$. On a donc l'existence d'une sous-solution $q(t, y)$ de v pour $y \in [0; \infty[$, qui s'écrit sous la forme (5.12) pour

$$G(t, y) = \frac{A(t)}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{y'(y'-2y)}{4t}} - e^{-\frac{y'(2y+y')}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \tilde{q}_0(y') dy'.$$

et l'on observe que $G(t, 0) = 0$, et que $|G(t, y)| < C(\sigma, q_0)$. ■

On a une sous-solution, mais son expression en fonction de $\sigma > 2$ ne donne aucune indication quant à la vitesse d'invasion de la composante v car q ne se propage pas à la vitesse σ , donc on ne peut pas calculer aisément sa vitesse d'invasion. D'où la présence du lemme.

Lemme 5.9. *On pose $\sigma > 2$, $q_0(y) : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0; 1]$ à support compact et $G(t, y)$ défini comme dans le lemme précédent. On pose $\delta > 0$. Alors il existe $\tau_\pm(t; \delta, \sigma, q_0)$ et $T^*(\sigma, \delta, q_0) > 0$ tels que la fonction \underline{v} définie par*

$$\underline{v}(t, x) = e^{\nu_v^-(\sigma, 0)(x - \sigma t)} e^{-\delta t},$$

soit une sous-solution pour $y \in [\tau_-(t); \tau_+(t)]$ et $t > T^*$.

Preuve. On prouve le résultat en plusieurs étapes

Traduction de $v(t, x) \leq q(t, x - \sigma t)$ Dans les faits, on recherche les points tels que $\underline{v}(t, x) \leq q(t, y) = q(t, x - \sigma t)$. On cherche donc les couples $(t, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$ solutions de l'équation non linéaire :

$$e^{(1 - \frac{\sigma^2}{4})t} e^{-\frac{\sigma}{2}y} e^{-\frac{y^2}{4t}} G(t, y) = e^{\nu y} e^{-\delta t},$$

où on a noté ν pour $\nu_v^-(\sigma, 0)$. Par passage au logarithme, on a :

$$-\frac{y^2}{4t} - \left(\frac{\sigma}{2} + \nu\right)y + \left(1 - \frac{\sigma^2}{4} + \delta\right)t + \log(G(t, y)) = 0.$$

On fait le changement de variable $z = \frac{y}{2t}$ et on divise par $-t$. On obtient ainsi :

$$z^2 + (\sigma + 2\nu)z - \left(1 - \frac{\sigma^2}{4} + \delta\right) - \frac{1}{t} \log(\tilde{G}(t, z)) = 0.$$

Si on fait un nouveau changement de variable $\rho = \frac{1}{\sqrt{t}}$, on peut définir la fonction $H(\rho, z)$ de manière implicite :

$$F(\rho, z) = z^2 + (\sigma + 2\nu)z - \left(1 - \frac{\sigma^2}{4} + \delta\right) - \rho^2 \log(\rho H(\rho, z)) = 0.$$

Le calcul de $H(\rho, z)$ donne :

$$\begin{aligned}
G(t, y) &= \frac{A(t)}{\sqrt{2\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(y')^2}{4t} + \frac{y'y}{2t}} - e^{-\frac{(y')^2}{4t} - \frac{y'y}{2t}} \right) \tilde{q}_0(y') dy', \\
H(\rho, z) &= \frac{\tilde{G}(t, z)}{\rho} = \frac{2A(\rho^{-2})}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(y'\rho)^2}{4}} 2\sinh(y'z) \tilde{q}_0(y') dy'.
\end{aligned}$$

Expression des (t, x) où on a égalité On remarque que $H(\rho, z)$ est une fonction C^1 en ρ et z car A l'est et H_ρ et H_z sont continues, par convergence dominée sur des compacts de \mathbb{R}_+^* pour ρ et \mathbb{R}_+ pour z . Pour $\rho = 0$, on a un polynôme du second degré en z , les solutions sont donc

$$z_{\pm} = -\nu - \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma + 2\nu)^2 + 4 \left(1 - \frac{\sigma^2}{4} + \delta\right)}.$$

Comme on a $\nu = \nu_v^-$ et l'identité $\nu^2 + \sigma\nu + 1 = 0$, alors

$$\begin{aligned} (\sigma + 2\nu)^2 &= \sigma^2 + 4(\nu^2 + \sigma\nu), \\ &= \sigma^2 - 4, \end{aligned}$$

si bien qu'on a :

$$\begin{aligned} z_{\pm} &= -\left(-\frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 - 4}\right) - \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 - 4 + 4 \left(1 - \frac{\sigma^2}{4} + \delta\right)}, \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 - 4} \pm \sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

On rappelle que $F(0, z_{\pm}) = 0$. De plus, F est clairement C^1 car H l'est. Enfin,

$$\begin{aligned} F_\rho(0, z_{\pm}) &= z^2 + (\sigma + 2\nu)z - \left(1 - \frac{\sigma^2}{4} + \delta\right) + 0, \\ &= F(0, z_{\pm}) = 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F_z(0, z_{\pm}) &= 2z_{\pm} + \sigma + 2\nu + 0, \\ &= 2z_{\pm} - (z_{\pm} + z_{\mp}), \\ &= z_{\pm} - z_{\mp}, \\ &= \pm 2\sqrt{\delta} \neq 0. \end{aligned}$$

Le théorème des fonctions implicites donne l'existence d'un $\rho^* > 0$ tel que pour tout $\rho \in [0; \rho^*]$, il existe deux uniques $z(\rho) := z_{\pm} + R_{\pm}(\rho)$ tels que $F(\rho, z(\rho)) = 0$. Ce sont les points en variables (ρ, z) , tels qu'on ait $\underline{v}(t, x) = q(t, x - \sigma t)$. Si on revient aux variables de départ :

$$\begin{aligned} z(\rho) &= z_{\pm} + R_{\pm}(\rho), \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 - 4} \pm \sqrt{\delta} + R_{\pm}(\rho), \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 - 4} \pm \sqrt{\delta} + R_{\pm} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right), \end{aligned}$$

qu'il faut multiplier par t pour revenir au problème de départ. Bien qu'on ait divisé par $-t$, le signe moins n'a aucune influence puisqu'on cherche la nullité. On a donc

$$\tau_{\pm}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 - 4} t \pm \sqrt{\delta} t + R_{\pm} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) t.$$

Finalement il existe $T^* = \left(\frac{1}{\rho^*(\sigma, \delta, q_0)} \right)^2$ tel que pour tout $t > T^*$ ils existent deux uniques valeurs $x - \sigma t = y = \tau_{\pm}(t)$ définies ci-dessus pour lesquels on a $\underline{v}(t, x) = q(t, x - \sigma t)$.

Expression des (t, x) pour lesquels on a l'inégalité À partir de là, on peut en déduire que $\underline{v}(t, x) \leq q(t, x - \sigma t)$ pour $y \in [\tau_-(t); \tau_+(t)]$. En effet, le théorème des fonctions implicites nous assure que $F(\rho, z)$ change de signe dans un voisinage d'un z_{\pm} , donc il en est de même pour $q(t, x - \sigma t) - \underline{v}(t, x)$. Or, si on regarde les taux de décroissance des deux fonctions quand $y \rightarrow \infty$ à $t > T^*$ fixé, on a

$$\begin{aligned} q(t, y) &\underset{y \rightarrow \infty}{=} O\left(e^{-\frac{y^2}{4t}}\right), \\ v(t, x) &\underset{y \rightarrow \infty}{=} O\left(e^{\nu_v^-(\sigma)y}\right). \end{aligned}$$

Il est donc clair que pour les grandes valeurs de y , on a $q(t, x - \sigma t) \leq v(t, x)$. Ce qui permet d'affirmer que c'est pour $y \in [\tau_-(t); \tau_+(t)]$ qu'on a $\underline{v}(t, x) \leq q(t, x - \sigma t)$. La preuve est conclue. ■

Grâce à cette sous-solution pour l'équation en v , on peut démontrer le lemme suivant :

Lemme 5.10. *Pour tous $(d, \alpha) \in IV$, on a $s_{sel} \geq s_{anorm}$.*

Preuve. Là encore, le résultat sera prouvé à travers plusieurs étapes intermédiaires. On considère $\text{Max}(2, 2\sqrt{d\alpha}) < s < \sigma < s_{anorm}$ et $y = x - \sigma t$.

Forme des sous-solutions On va montrer qu'il existe une famille à un paramètre de fonctions $\underline{u}(t, x)$ telles que

$$N(\underline{u}) = \underline{u}_t - d\underline{u}_{xx} - f(\underline{u}) - \beta v^p(t, x)(1 - \underline{u}) < 0.$$

On va montrer que ce paramètre peut être pris tel que $\underline{u}(t, x) < u(t, x)$ pour une certaine valeur de $t > 0$. La sous-solution \underline{u} consiste en :

- un front $U_r(x - st)$ se propageant à la vitesse s , solution de l'équation non linéaire découplée pour u : $dU_r'' + sU_r' + f(U_r) = 0$. Il est déterminé à translation près et donc on le paramétrise à partir de $r \in \mathbb{R}$ par $U_r(r) = \frac{1}{2}$. Comme $s > 2\sqrt{d\alpha}$, il s'agit d'un front et admet une décroissance spatiale en $e^{\nu_u^+(s)y}$ quand $y \rightarrow \infty$.
- une fonction $\psi(y, t)$ construite à partir d'une solution de l'équation suivante : $u_t = du_{yy} + \sigma u_y + \alpha u + \beta \underline{v}^p(t, y)$.

La famille de sous-solutions paramétrée par r est construite pour une fonction $\Theta_+(t) > 0$ bien choisie comme suit :

$$\underline{u}(t, x) = \begin{cases} U_r(x - st) & , x < \sigma t, \\ U_r((\sigma - s)t)\psi(x - \sigma t, t) & , \sigma t \leq x < \sigma t + \Theta_+(t), \\ 0 & , x \geq \sigma t + \Theta_+(t). \end{cases}$$

Afin de garantir la continuité en $x = \sigma t$, il faut avoir $\psi(0, t) = 1$. De même, il faut avoir $\psi(\Theta_+(t), t) = 0$.

Expliciter ψ Pour expliciter ψ , on résout d'abord l'équation

$$u_t = du_{yy} + \sigma u_y + \alpha u + \beta e^{\nu_v^-(\sigma)y} e^{-p\delta t}.$$

Par une séparation des variables, on voit que la solution la plus générale de cette équation s'écrit, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ quelconque :

$$u(t, y) = e^{\lambda t} \left(c_1 e^{\nu_u^+(\sigma, \lambda)y} + c_2 e^{\nu_u^-(\sigma, \lambda)y} \right) + P(t, y),$$

avec $P(t, y)$ une solution particulière de l'équation. Pour construire ψ , on part d'une solution générale stationnaire, en posant $\lambda = 0$. Afin de pouvoir être une sous-solution au point de non différentiabilité $\sigma t + \Theta_+(t)$, on impose $c_2 = 0$. On a donc

$$u(t, y) = c_1 e^{\nu_u^+(\sigma)y} + P(t, y).$$

On fait le changement d'inconnue $u(t, y) = w(t, y)e^{-p\delta t}$ qui donne

$$w_t = dw_{yy} + \sigma w_y + (\alpha + \delta)w + \beta e^{p\nu_v^-(\sigma)y}.$$

La solution particulière est obtenue en cherchant une solution sous la forme Ce^{ky} :

$$(dk^2 + \sigma k + \alpha + \delta) Ce^{ky} + \beta e^{p\nu_v^-(\sigma)y} = 0,$$

ce qui permet de trouver :

$$\begin{cases} k = p\nu_v^-(\sigma), \\ C = -\frac{\beta}{dk^2 + \sigma k + \alpha + \delta}. \end{cases}$$

En passant aux coordonnées de base, la solution particulière qu'on a trouvée s'écrit :

$$P(t, y) = -\frac{\beta}{d(p\nu_v^-(\sigma))^2 + \sigma p\nu_v^-(\sigma) + \alpha + \delta} e^{p\nu_v^-(\sigma)y} e^{-p\delta t}.$$

On notera dans la suite $D(\nu) \equiv d\nu^2 + \sigma\nu + \alpha + \delta$. On rappelle qu'on est dans le cadre $(d, \alpha) \in \text{IV}$ et que $\max(2, 2\sqrt{d\alpha}) < s < \sigma < s_{anorm}$. On montre que $\nu_u^-(\sigma) < \nu_u^+(\sigma) < p\nu_v^-(\sigma) < 0$. En effet, la fonction

$$\begin{aligned} f(z) &= \nu_u^+(z) - p\nu_v^-(z), \\ &= -\frac{z}{2d} + \frac{1}{2d}\sqrt{z^2 - 4d\alpha} + \frac{z}{2}p + \frac{1}{2}p\sqrt{\sigma^2 - 4}. \end{aligned}$$

est une fonction C^1 en z . Comme $(d, \alpha) \in \text{IV}$, on a vu que, pour $z > 0$, $f(z) = 0$ si et seulement si $z = s_{anorm}$. Calculons la dérivée de f en s_{anorm} :

$$\begin{aligned} f'(z) &= -\frac{1}{2d} + \frac{1}{2d} \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4d\alpha}} + \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4}}, \\ f'(s_{anorm}) &> \frac{1}{2d} \left(\frac{s_{anorm}}{\sqrt{s_{anorm}^2 - 4d\alpha}} - 1 \right), \\ &> \frac{1}{2d} \left(\frac{s_{anorm}}{\sqrt{s_{anorm}^2}} - 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $f(\sigma) > 0$ pour $\sigma > s_{anorm}$ et $f(\sigma) < 0$ pour $\sigma < s_{anorm}$. Donc on a bien $\nu_u^+(\sigma) < p\nu_v^-(\sigma) < 0$. Cela implique nécessairement que $d p^2 \nu_v^-(\sigma)^2 + \sigma p \nu_v^-(\sigma) + \alpha > 0$, donc en particulier comme $\delta > 0$, on a $D(p\nu_v^-(\sigma)) > 0$. On va maintenant voir c_1 comme une fonction du temps :

$$\psi(x - \sigma t, t) = c_1(t) e^{\nu_u^+(\sigma)y} - \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{p\nu_v^-(\sigma)y} e^{-p\delta t}.$$

On a besoin que $\psi(0, t) = 1$, ce qui impose que

$$c_1(t) = 1 + \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta t}.$$

Finalement, on a

$$\psi(y, t) = \left(1 + \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta t} \right) e^{\nu_u^+(\sigma)y} - \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta t} e^{p\nu_v^-(\sigma)y}.$$

De plus, comme $\nu_u^+(\sigma) < p\nu_v^-(\sigma) < 0$, on a à t fixé $\psi(y, t) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0^-$. Comme $\psi(0, t) = 1$, elle s'annule en au moins un point $y(t) > 0$. Ce point est même unique. En effet, la résolution de $\psi(y, t) = 0$ donne :

$$\begin{aligned} c_1(t)e^{\nu_u^+(\sigma)y} &= \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta t} e^{p\nu_v^-(\sigma)y}, \\ \left(\frac{c_1(t)D(p\nu_v^-(\sigma))}{\beta} \right) e^{\nu_u^+(\sigma)y} &= e^{-p\delta t} e^{p\nu_v^-(\sigma)y}, \\ \log \left(\frac{c_1(t)D(p\nu_v^-(\sigma))}{\beta} \right) + \nu_u^+(\sigma)y &= -p\delta t + p\nu_v^-(\sigma)y, \\ (p\nu_v^-(\sigma) - \nu_u^+(\sigma))y &= p\delta t + \log \left(\frac{c_1(t)D(p\nu_v^-(\sigma))}{\beta} \right), \\ y &= \frac{1}{p\nu_v^-(\sigma) - \nu_u^+(\sigma)} \log \left(\frac{c_1(t)D(p\nu_v^-(\sigma))}{\beta} e^{p\delta t} \right). \end{aligned}$$

On notera ce point $\Theta_+(t)$. En tenant compte de l'expression de $c_1(t)$, on peut l'écrire :

$$\begin{aligned} \Theta_+(t) &= \frac{1}{p\nu_v^-(\sigma) - \nu_u^+(\sigma)} \log \left(\left(1 + \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta t} \right) \left(\frac{D(p\nu_v^-(\sigma))}{\beta} e^{p\delta t} \right) \right), \\ &= \frac{1}{p\nu_v^-(\sigma) - \nu_u^+(\sigma)} \log \left(\frac{D(p\nu_v^-(\sigma))}{\beta} e^{p\delta t} + 1 \right), \\ &= \frac{p\delta}{p\nu_v^-(\sigma) - \nu_u^+(\sigma)} t + \frac{1}{p\nu_v^-(\sigma) - \nu_u^+(\sigma)} \log \left(\frac{D(p\nu_v^-(\sigma))}{\beta} + e^{-p\delta t} \right), \\ &=: L_\Theta t + R_\Theta(t). \end{aligned}$$

Sélectionner un δ On a montré que pour tout $\delta > 0$, la fonction \underline{v} est une sous-solution de l'intervalle $[\tau_-(t); \tau_+(t)]$. Nous avons également construit pour tout $\delta > 0$ une fonction ψ qui serait un bon candidat pour construire la sous-solution de u , avec les propriétés suivantes :

$$\psi(0, t) = 1, \quad \psi(\Theta_+(t), t) = 0, \quad \psi(y, t) > 0 \text{ pour tout } 0 \leq y \leq \Theta_+(t).$$

On va maintenant imposer une valeur pour δ . On pose

$$\delta_c = \frac{\sqrt{\sigma^2 - 4}}{p} (p\nu_v^-(\sigma) - \nu_u^+(\sigma)) > 0.$$

On affirme que pour $\delta = \delta_c$, il existe $T_\delta(\sigma, q_0) > 0$ tel que

$$\tau_-(t) < \Theta_+(t) < \tau_+(t), \text{ pour tout } t > T_\delta(\sigma, q_0).$$

De plus, si σ est suffisamment proche de s_{anorm} , on a $\tau_-(t) > 0$ pour $t > T_\delta$. On rappelle l'expression de $\tau_\pm(t)$, pour tout $t > T^*(\sigma, \delta_c, q_0)$:

$$\tau_\pm(t) = \sqrt{\sigma^2 - 4}t \pm 2\sqrt{\delta_c}t + 2R_\pm \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) t.$$

D'une part, les R_\pm sont les termes correctifs tels que $z(\rho) = z_\pm \pm R_\pm(\rho)$ soient les points pour lesquels on a $\underline{v}(t, x) = q(t, x - \sigma t)$, avec $z = \frac{y}{2t}$ et $\rho = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Par continuité de $F(z, \rho)$ du lemme 5.9, on a que $R_\pm(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0$, donc $R_\pm \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. D'autre part, pour $\Theta_+(t) = L_\Theta t + R_\Theta(t)$, on a $R_\Theta(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} Cte$. Finalement, on a les équivalents suivants quand $t \rightarrow \infty$

$$\tau_\pm(t) \sim \left(\sqrt{\sigma^2 - 4} \pm 2\sqrt{\delta_c} \right) t,$$

$$\begin{aligned}
\Theta_+(t) &\sim L_{\Theta}t, \\
&\sim \frac{p\delta_c}{p\nu_v^-(\sigma) - \nu_u^+(\sigma)}t, \\
&\sim \sqrt{\sigma^2 - 4}t,
\end{aligned}$$

On a donc bien, pour $\delta = \delta_c$, l'existence d'un $T_{\delta}(\sigma, q_0) > T^*(\sigma, \delta_c, q_0)$ tel que pour tout $t > T_{\delta}(\sigma, q_0)$ on ait $\tau_-(t) < \Theta_+(t) < \tau_+(t)$. C'est encore vrai si $\sqrt{\sigma^2 - 4} - 2\sqrt{\delta_c} = 0$. Pour la dernière assertion du théorème, on sait que :

$$p\nu_v^-(\sigma) - \nu_u^+(\sigma) \xrightarrow{\sigma \rightarrow s_{anorm}} 0.$$

Donc $\delta_c \xrightarrow{\sigma \rightarrow s_{anorm}} 0$. Il vient que pour σ suffisamment proche de s_{anorm} , on a $\sqrt{\sigma^2 - 4} - 2\sqrt{\delta_c} > 0$, donc que $\tau_-(t) > 0$ pour t assez grand. En fait, le seuil dépend de σ , δ_c et de R_{\pm} . Or, R_{\pm} dépend en fait de σ , δ_c et q_0 à travers ρ^* . On peut donc prendre $T_{\delta}(\sigma, q_0)$ suffisamment grand pour qu'on ait $\tau_-(t) > 0$ pour $t > T_{\delta}(\sigma, q_0)$.

Fracture de la droite réelle On rappelle qu'on a l'expression suivante pour \underline{u} avec $y = x - \sigma t$:

$$\underline{u}(t, x) = \begin{cases} U_r(x - \sigma t) & , y < 0, \\ U_r((\sigma - s)t)\psi(x - \sigma t, t) & , 0 \leq y < \Theta_+(t), \\ 0 & , y \geq \Theta_+(t). \end{cases}$$

Il faut vérifier que pour tous (t, x) on a $N(\underline{u}) = \underline{u}_t - d\underline{u}_{xx} - \alpha(\underline{u} - \underline{u}^2) - \beta v(t, x) \leq 0$. On se place toujours dans une fenêtre $y = x - \sigma t$, et pour $t > T_{\delta}(\sigma, q_0)$, on décompose \mathbb{R} en quatre domaines :

$$\begin{aligned}
I_a &=]-\infty; 0], \\
I_b &=]0; \tau_-(t)], \\
I_c &=]\tau_-(t); \Theta_+(t)], \\
I_d &=]\Theta_+(t); \infty[.
\end{aligned}$$

A noter que sur I_c , on a \underline{v} qui est une sous-solution de v , mais pas sur I_b . On va prouver qu'il existe un $T_u(s, \sigma, q_0) \geq \max(T^*, T_{\delta})$ et un $r_c(T_u, s, \sigma, q_0)$ tels que pour tout $r < r_c$ la fonction $\underline{u}(t, x)$ soit une sous-solution de u pour $t > T_u$ et pour tout x .

Régions I_a et I_d Dans la région I_a , on a $\underline{u}(t, x) = U_r(x - \sigma t)$ et dans la région I_d , on a $\underline{u}(t, x) = 0$. Dans les deux cas, on a $\underline{u}_t - d\underline{u}_{xx} - f(\underline{u}) = 0$, donc $N_u(\underline{u}) = -\beta v(t, x)^p(1 - \underline{u}) \leq 0$.

Expression de $N_u(\underline{u})$ dans les régions I_b et I_c On rappelle l'expression de \underline{u} dans ce cas, et les propriétés de ψ :

$$\begin{aligned}
\underline{u}(t, x) &= U_r((\sigma - s)t)\psi(x - \sigma t, t), \\
\psi(x - \sigma t, t) &= c_1(t)e^{\nu_u^+(\sigma)y} - \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))}e^{p\nu_v^-(\sigma)y}e^{-p\delta_c t},
\end{aligned}$$

$$\psi_t - c_1'(t)e^{\nu_u^+(\sigma)y} = d\psi_{yy} + \sigma\psi_y + \alpha\psi + \beta v^p.$$

La fonction \underline{u} a la même expression dans les deux régions I_b et I_c . L'expression de $N_u(\underline{u})$ est également similaire dans les deux cas. Dans la suite, on écrit U_r à la place de $U_r(\sigma t - st)$ et de même pour U_r' :

$$\begin{aligned}
N_u(\underline{u}) &= \underline{u}_t - d\underline{u}_{xx} - f(\underline{u}) - \beta v^p(1 - \underline{u}), \\
&= \underline{u}_t - d\underline{u}_{yy} - \sigma \underline{u}_y - f(\underline{u}) - \beta v(t, y)^p(1 - \underline{u}), \\
&= (\sigma - s)U_r' \psi + U_r(\psi_t - d\psi_{yy} - \sigma \psi_y) - f(U_r \psi) - \beta v(t, y)^p(1 - U_r \psi), \\
&= (\sigma - s)U_r' \psi + U_r \left(c_1'(t) e^{\nu_u^+(\sigma)y} + \alpha \psi + \beta \underline{v}^p \right) - f(U_r \psi) - \beta v(t, y)^p(1 - U_r \psi).
\end{aligned}$$

On regroupe alors les termes de la façon suivante :

$$N_u(\underline{u}) = (\sigma - s)U_r' \psi + U_r \left(c_1'(t) e^{\nu_u^+(\sigma)y} + \beta \underline{v}^p \right) + \alpha(U_r \psi) - f(U_r \psi) - \beta v^p + \beta v^p U_r \psi.$$

Or, le front U_r est solution de l'équation $dU_r'' + sU_r' + \alpha(U_r - U_r^2) = 0$. Le portrait de phase donne le résultat suivant : la façon dont le front U_r relie l'état 1 à l'état 0 permet, localement au voisinage de $U_r = 0$, de définir U_r' comme une fonction de U_r . On sait aussi que $U_r \sim e^{\nu_u^+ y}$ quand $y = x - st \rightarrow \infty$. Ainsi, on a le développement limité suivant :

$$\begin{aligned}
U_r' &\underset{U_r \rightarrow 0}{=} \nu_u^+ U_r + O(U_r^2), \\
&= U_r \left(\nu_u^+(s) + R(U_r) \right).
\end{aligned}$$

avec $|R(U_r)| < KU_r$ pour un $K > 0$ si U_r est suffisamment proche de zéro. On peut donc regrouper les termes comme suit :

$$\begin{aligned}
N_u(\underline{u}) &= [(\sigma - s)\nu_u^+(s) + \beta v^p + (\sigma - s)R(U_r)] U_r \psi \\
&+ \left[U_r c_1'(t) e^{\nu_u^+(\sigma)y} \right] + [\alpha(U_r \psi) - f(U_r \psi)] + \beta [U_r \psi \underline{v}^p - v^p].
\end{aligned}$$

Région I_c $]=[\tau_-(t); \Theta_+(t)]$ Comme on a choisi δ et $t > T_\delta$ tels que $\tau_-(t) < \Theta_+(t) < \tau_+(t)$ alors pour $y \in I_c$, on a que \underline{v} est une sous-solution de u . Donc, comme $U_r \leq 1$, on a

$$U_r \underline{v}^p \leq v^p.$$

Donc le dernier terme de $N_u(\underline{u})$ est strictement négatif. Il en est de même pour le deuxième terme :

$$\begin{aligned}
c_1(t) &= 1 + \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta t} > 0, \\
c_1'(t) &= -\frac{\beta\delta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta t} < 0.
\end{aligned}$$

On regarde maintenant le premier terme. On sait que $(\sigma - s)\nu_u^+(s)$ est un nombre strictement négatif fixé car on a pris $s < \sigma < s_{anorm}$. De plus, comme U_r en décroissant strictement, on sait que pour $t > T_\delta(\sigma, q_0)$, on a

$$U_r(\sigma t - st) < U_r(\sigma T_\delta - sT_\delta).$$

De plus, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $r_0(s, \sigma, q_0)$, δ_c étant lui-même fonction de σ , tel que pour tous $r < r_0(s, \sigma, q_0)$ et $t > T_\delta$, on a

$$\begin{aligned}
U_r(\sigma t - st) &< U_r(\sigma T_\delta - sT_\delta), \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

Alors, ϵ suffisamment petit, ou T_δ suffisamment grand, on a

$$\begin{aligned} R(U_r(\sigma t - st)) &\leq CU_r(\sigma t - st) < C\epsilon, \\ \alpha(U_r\psi) - f(U_r\psi) &= \alpha(U_r\psi) - f'(0)U_r\psi + O\left((U_r\psi)^2\right) \\ &= O\left((U_r\psi)^2\right) \end{aligned}$$

si bien que pour $r < r_0(s, \sigma, q_0)$ et $t > T_\delta$, on a

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}(\sigma - s)\nu_u^+(s) + \nu_u^+(s)R(U_r(\sigma t - st)), \\ &< \frac{1}{3}(\sigma - s)\nu_u^+(s) + \nu_u^+(s)C\epsilon < 0, \\ &\frac{1}{3}(\sigma - s)\nu_u^+(s)U_r\psi + [\alpha(U_r\psi) - f(U_r\psi)], \\ &= U_r\psi \left[\frac{1}{3}(\sigma - s)\nu_u^+(s) + O(U_r\psi) \right], \\ &< 0, \end{aligned}$$

pour ϵ suffisamment petit et pour tout $x - \sigma t \in I_c$. A partir de là, comme $\sigma > 2$, on sait que $\beta v^p(t, \sigma t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$ donc il existe un T_δ éventuellement encore plus élevé tel que pour tout $t > T_\delta$, on ait

$$\frac{1}{3}(\sigma - s)\nu_u^+(s) + \beta v^p(t, \sigma t) < 0.$$

Puis, comme v est strictement décroissant en $y = x - \sigma t$, cette inégalité reste valable pour $y \in I_b \cup I_c =]0; \Theta_+(t)[$. Les premier et troisième termes additionnés dans $N_u(\underline{u})$ forment donc un résultat négatif pour t et r bien choisis. Donc on a $N(\underline{u}) \leq 0$ sur I_c .

Région $I_b =]0; \tau_-(t)[$ Pour les trois premiers termes de $N_u(\underline{u})$, la même discussion que pour la région I_c est valide. Par contre, on a besoin de contrôler le dernier terme $\beta[U_r v^p - v^p]$, qui n'est plus nécessairement positif pour $x - \sigma t \in I_b$. Dans les faits, il suffit de contrôler $\beta U_r v^p$. On sait que dans la région I_b , on a $\psi(x - \sigma t, t) > 0$ car $x - \sigma t < \Theta_+(t)$. On peut donc diviser ce terme par $\psi(x - \sigma t, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\beta U_r v^p}{\psi(x - \sigma t, t)} &= \frac{\beta U_r e^{p\nu_v^-(\sigma)(x - \sigma t)} e^{-p\delta_c t}}{c_1(t) e^{\nu_u^+(\sigma)(x - \sigma t)} - \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{p\nu_v^-(\sigma)(x - \sigma t)} e^{-p\delta_c t}}, \\ &= \frac{\beta U_r}{c_1(t) e^{[\nu_u^+(\sigma) - p\nu_v^-(\sigma)](x - \sigma t)} e^{p\delta_c t} - \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))}}. \end{aligned}$$

On rappelle que c_1 est strictement positif, borné, a une limite 1 en $+\infty$ et que $\nu_u^+ - p\nu_v^- < 0$. Pour $(x - \sigma t) \in I_b =]0; \tau_-(t)[$, on va montrer que ce terme peut être rendu aussi petit qu'on veut pour t suffisamment grand. Pour cela, on étudie l'expression dans l'exponentielle, qui est la seule dépendance temporelle de ce terme :

$$\begin{aligned} [\nu_u^+ - p\nu_v^-](x - \sigma t) + p\delta_c t &\geq [\nu_u^+ - p\nu_v^-] \tau_-(t) + p\delta_c t, \\ &= [\nu_u^+ - p\nu_v^-] \left(\sqrt{\sigma^2 - 4t} - 2\sqrt{\delta_c t} + 2R_-(t)t \right), \\ &+ \sqrt{\sigma^2 - 4t} (p\nu_v^- - \nu_u^+) t, \\ &= [\nu_u^+ - p\nu_v^-] \left(-2\sqrt{\delta_c} + 2R_-(t) \right) t. \end{aligned}$$

Or, quand $t \rightarrow \infty$, on a $R_-(t) \rightarrow 0$. Donc il existe $T > 0$ tel que pour tout $t > T$, on a $-2\sqrt{\delta_c} + 2R_-(t) < 0$. Comme $\nu_u^+ - p\nu_v^- < 0$, il vient que pour tout $M > 0$ il existe $T' > T$ tel que pour tout $t > T'$ on a $[\nu_u^+ - p\nu_v^-](x - \sigma t) + p\delta_c t > M$. Donc le terme $\frac{\beta U_r v^p}{\psi(x - \sigma t, t)}$ peut être rendu aussi petit qu'on veut pour $(x, t) \in I_b$ en prenant t assez grand. Finalement, il existe $T_u(s, \sigma, q_0) > \max(T', T_\delta)$ tel que pour tout $t > T_u$, on a $N(\underline{u}) < 0$, donc \underline{u} est une sous-solution de u sur I_b .

Conditions sur les dérivées On vérifie que \underline{u} est une sous-solution aux points de non différentiabilité. C'est évident au point $y = \Theta_+(t)$, car $\psi(y, t)$ étant positive à gauche de ce point, on a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \Theta^-} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} &= U_r(\sigma t - st) \lim_{y \rightarrow \Theta^-} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ &\leq \lim_{y \rightarrow \Theta^+} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Il reste à le montrer pour $x = \sigma t$, i.e. $y = 0$. C'est aussi le point extrême des régions I_a et I_b . Dans la région I_a , on a :

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} &= \lim_{x - \sigma t \rightarrow 0^-} \frac{\partial}{\partial y} (U_r(x - st)), \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\partial}{\partial y} (U_r(y + \sigma t - st)), \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} U_r'(y + \sigma t - st), \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^-} \nu_u^+(s) U_r(y + \sigma t - st) [1 + R(U_r(y + \sigma t - st))], \\ &= \nu_u^+(s) U_r(\sigma t - st) [1 + R(U_r(\sigma t - st))]. \end{aligned}$$

Tandis que dans la région I_b , on a

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial y} (U_r(\sigma t - st) \psi(y, t)), \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} U_r(\sigma t - st) \frac{\partial \psi}{\partial y}(y, t), \\ &= U_r(\sigma t - st) \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial y} \left(c_1(t) e^{\nu_u^+(\sigma)y} - \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{p\nu_v^-(\sigma)y} e^{-p\delta_c t} \right), \\ &= U_r(\sigma t - st) \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\nu_u^+(\sigma) c_1(t) e^{\nu_u^+(\sigma)y} - \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} \nu_v^-(\sigma) e^{p\nu_v^-(\sigma)y} e^{-p\delta_c t} \right), \\ &= U_r(\sigma t - st) \left(\nu_u^+(\sigma) c_1(t) - \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} p\nu_v^-(\sigma) e^{-p\delta_c t} \right), \\ &= U_r(\sigma t - st) \left(\nu_u^+(\sigma) \left(1 + \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta_c t} \right) - \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} p\nu_v^-(\sigma) e^{-p\delta_c t} \right), \\ &= U_r(\sigma t - st) \left(\nu_u^+(\sigma) + \frac{(\nu_u^+(\sigma) - p\nu_v^-(\sigma)) \beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta_c t} \right) < 0. \end{aligned}$$

On est bien négatif car $\nu_u^+(\sigma) < p\nu_v^-(\sigma) < 0$, et $D(p\nu_v^-(\sigma)) > 0$. A partir de là, comme $s < \sigma$ et que

$$\frac{\partial}{\partial s} \nu_u^+ = \frac{1}{2d} \left(-1 + \frac{s}{\sqrt{s^2 - 4d\alpha}} \right) > 0,$$

pour tout $s > \sqrt{2d\alpha}$, on en déduit que $\nu_u^+(s) < \nu_u^+(\sigma)$. Ainsi, avec un $T_u(s, \sigma, q_0)$ éventuellement encore plus grand, on peut assurer que pour $t > T_u$:

$$\nu_u^+(s) < \nu_u^+(\sigma) + \frac{(\nu_u^+(\sigma) - p\nu_v^-(\sigma)) \beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta_c t}.$$

De plus, comme $\sigma - s > 0$ et $U_r(y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0$, pour tout $t > T_u$ on a $U_r((\sigma - s)t) < U_r((\sigma - s)T_u)$. Après quoi, comme $U_r(y) \xrightarrow{r \rightarrow -\infty} 0$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r_c(T_u, s, \sigma, q_0) \leq r_0(s, \sigma, q_0)$ tel que pour tout $r < r_c$ et pour tout $t > T_u$, on a $U_r(\sigma t - st) < \epsilon$. Alors, comme $R(U_r) \xrightarrow{U_r \rightarrow 0} 0$, il suffit de prendre ϵ , et donc r_c suffisamment petits de façon à ce que

$$\begin{aligned} \nu_u^+(s) [1 + R(U_r(\sigma t - st))] &< \nu_u^+(\sigma) + \frac{(\nu_u^+(\sigma) - p\nu_v^-(\sigma))\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta_c T_u}, \\ &< \nu_u^+(\sigma) + \frac{(\nu_u^+(\sigma) - p\nu_v^-(\sigma))\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta_c t}, \end{aligned}$$

ce qui permet de vérifier la condition souhaitée :

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y} < \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial \underline{u}}{\partial y}.$$

On a donc bien une sous-solution pour tous $t > T_u$, $r < r_c$ et $x \in \mathbb{R}$.

Une sous-solution intermédiaire Au lieu de montrer que $\underline{u}(0, x) \leq u_0(x)$ comme on l'a fait jusqu'ici, on va montrer que $\underline{u}(T_u, x) \leq u(T_u, x)$, ce qui suffira pour montrer que $\underline{u}(t, x) \leq u(t, x)$ en temps long. Comme la vitesse sélectionnée est une vitesse asymptotique, cette méthode est bien valide. Afin de montrer cela, on va construire une autre sous-solution pour l'équation en u .

On considère un front sous-critique $u_{osc}(x - s_\epsilon t)$ qui se propage vers la droite à une vitesse $s_\epsilon = 2\sqrt{d\alpha} - \epsilon < 2\sqrt{d\alpha}$. On sait par une étude du portrait de phase que de tels fronts oscillent autour de 0. Comme pour le lemme 5.7, on va garder uniquement la partie à gauche du premier zéro de u_{osc} , noté θ , et on prolonge à droite par 0 sur \mathbb{R} tout entier :

$$u_\epsilon(x - s_\epsilon t) = \begin{cases} u_{osc}(x - s_\epsilon t) & , x - s_\epsilon t \leq \theta, \\ 0 & , x - s_\epsilon t \geq \theta. \end{cases}$$

Par invariance par translation, on peut choisir θ comme on le souhaite. Comme $u_\epsilon \in [0; 1]$, c'est une sous-solution du système :

$$\begin{aligned} N_u(u_\epsilon) &= (u_\epsilon)_t - d(u_\epsilon)_{xx} - \alpha u_\epsilon(1 - u_\epsilon) - \beta v(1 - u_\epsilon), \\ &= -\beta v(1 - u_\epsilon) \leq 0. \end{aligned}$$

et pour θ suffisamment négatif, on a aussi $u_\epsilon(0, x) \leq u_0(x)$. Par le principe du maximum, on a aussi $u_{osc} < 1$, donc $u_\epsilon(0, x) < u_0(x)$ sur un ouvert de \mathbb{R} , en fait une demi-droite. Le principe du maximum donne alors $u_\epsilon(t, x) < u(t, x)$ pour tous $0 < t < T_u$ et $x \in \mathbb{R}$.

Minoration $\underline{u}(T_u, x) \leq u(T_u, x)$ sur $I_a \cup I_d$ Comme $u \equiv 0$ est une sous-solution de l'équation en u , et que $u_0(x) > 0$ sur un ouvert de \mathbb{R} , en fait une demi-droite, on en déduit par le principe du maximum que $u(T_u, x) > 0$ pour tout x . Comme $\underline{u} = 0$ sur I_d , on a déjà la minoration sur I_d .

A $t = T_u$, si le support de $u_\epsilon(T_u, x)$ coupe $I_b =]0; \tau_-(t)]$, alors $u_\epsilon > 0$ sur I_a . On peut affirmer l'existence d'un $r_1 \leq r_c$ tel que pour tout $r < r_1$, on a pour tous les $(T_u, x) \in I_a$, i.e. pour les $x \leq \sigma T_u$:

$$\underline{u}(T_u, x) = U_r(x - sT_u) < u_\epsilon(x - s_{sc}T_u) < u(T_u, x).$$

En effet, pour $(t, x) \in I_a$, on a ponctuellement $\underline{u}(t, x) = U_r(x - st) \xrightarrow{r \rightarrow -\infty} 0$. Il suffit donc de vérifier les taux de décroissance en $-\infty$. Les fronts u_{osc} et U_r sont respectivement solutions de $dU'' + \tilde{s}U' + f(U) = 0$, pour $\tilde{s} \in \{s_\epsilon, s\}$. En linéarisant autour de l'état 1 instable, on obtient : $dU'' + \tilde{s}U' + f'(1)U = 0$, donc $1 - U$ décroît comme $\exp(\mu_u^+(\tilde{s})x)$ quand $x \rightarrow -\infty$ avec

$$\mu_u^+(\tilde{s}) = -\frac{\tilde{s}}{2d} + \frac{1}{2d} \sqrt{\tilde{s}^2 - 4df'(1)} > 0,$$

car $f'(1) < 0$ par hypothèse. On voit que :

$$\frac{d}{ds} \mu_u^+(\tilde{s}) = \frac{1}{2d} \left(-1 + \frac{\tilde{s}}{\sqrt{\tilde{s}^2 - 4df'(1)}} \right) < 0,$$

ce qui entraîne que $\mu_u^+(s_\epsilon) > \mu_u^+(s)$, donc que la convergence vers 1 pour u_{osc} est plus rapide que celle pour U_r . Donc pour un t fixé, il existe une demi-droite en x allant vers $-\infty$ sur laquelle on a $U_r < u_{osc}$. On peut ensuite choisir $r_1 < r_c$ suffisamment petit de façon à ce que pour tous $r < r_1$ et $(T_u, x) \in I_a$, on a

$$\begin{aligned} U_r(x - sT_u) &< \min_{x \leq \sigma T_u} u_{osc}(x - s_{sc}T_u), \\ &\leq u_{osc}(x - s_{sc}T_u), \\ &< u(T_u, x). \end{aligned}$$

Toujours en $t = T_u$, si le support de u_{osc} est disjoint de I_b , on peut tout de même trouver une demi-droite $] -\infty; x_0(s_\epsilon, u_{osc})[$ sur laquelle on a $u_{osc} > \frac{1}{2}$. Alors là encore pour $r < r_c$ assez petit, on a $U_r < u_{osc}$ sur $] -\infty; x_0(s_\epsilon, u_{osc})[$. Ensuite, comme $u > 0$ par le principe du maximum, elle est minorée par une constante $c(s, \sigma, T_u, u_{osc}, s_{sc})$ sur l'intervalle compact $[x_0; \sigma T_u]$. Il suffit donc de prendre $r < r_c$ assez petit pour que $U_r(x - sT_u) < c$ pour $x \in [x_0; \sigma T_u]$. On a donc $\underline{u}(T_u, x) < u(T_u, x)$ sur I_a dans tous les cas.

Minoration $\underline{u}(T_u, x) \leq u(T_u, x)$ sur $I_b \cup I_c$ Pour la région $I_b \cup I_c =]\sigma T_u; \Theta_+(T_u) + \sigma T_u]$, on peut faire de même car $\Theta_+(T_u)$ ne dépend pas de r . Comme $u(T_u, x) > 0$, on a donc encore u minorée par une constante sur $I_b \cup I_c$. Or, pour tous $(T_u, x) \in I_b \cup I_c$, on a

$$\underline{u}(T_u, x) = U_r((\sigma - s)T_u)\psi(x - \sigma T_u, T_u)$$

On va montrer que $\psi(y, T_u) \leq 1$ sur $I_b \cup I_c$. Si on calcule la dérivée en y :

$$\begin{aligned} \psi(y, T_u) &= \left(1 + \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta_c T_u} \right) e^{\nu_u^+(\sigma)y} - \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{p\nu_v^-(\sigma)y} e^{-p\delta_c T_u}, \\ \psi_y(y, T_u) &= \left(1 + \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta_c T_u} \right) \nu_u^+(\sigma) e^{\nu_u^+(\sigma)y} - \frac{\beta p\nu_v^-(\sigma)}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{p\nu_v^-(\sigma)y} e^{-p\delta_c T_u}, \end{aligned}$$

On voit déjà que $\lim_{y \rightarrow -\infty} \psi_y(y) = -\infty$ et $\lim_{y \rightarrow \infty} \psi_y(y) = 0^+$. Ainsi, ψ_y s'annule en changeant de signe au moins une fois. De tels points doivent nécessairement vérifier $\psi_y(y, T_u) = 0$. Si on résout cette équation, on trouve :

$$\begin{aligned} 0 &= \left(1 + \frac{\beta}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{-p\delta_c T_u} \right) \nu_u^+(\sigma) e^{\nu_u^+(\sigma)y} - \frac{\beta p\nu_v^-(\sigma)}{D(p\nu_v^-(\sigma))} e^{p\nu_v^-(\sigma)y} e^{-p\delta_c T_u}, \\ e^{p\nu_v^-(\sigma)y} &= \left(\frac{D(p\nu_v^-(\sigma))}{\beta} e^{p\delta_c T_u} + 1 \right) \frac{\nu_u^+(\sigma)}{p\nu_v^-(\sigma)} e^{\nu_u^+(\sigma)y}, \\ p\nu_v^-(\sigma)y &= \log \left(\frac{D(p\nu_v^-(\sigma))}{\beta} e^{p\delta_c T_u} + 1 \right) + \log \frac{\nu_u^+(\sigma)}{p\nu_v^-(\sigma)} + \nu_u^+(\sigma)y, \\ y_0 &:= \frac{1}{p\nu_v^-(\sigma) - \nu_u^+(\sigma)} \left[\log \left(\frac{D(p\nu_v^-(\sigma))}{\beta} e^{p\delta_c T_u} + 1 \right) + \log \frac{\nu_u^+(\sigma)}{p\nu_v^-(\sigma)} \right]. \end{aligned}$$

Donc le seul point où $\psi_y(y, T_u) = 0$ est y_0 et ψ_y change de signe en ce point. Plus précisément, $\psi_y(y, T_u) < 0$ pour $y < y_0$ et $\psi_y(y, T_u) > 0$ pour $y > y_0$. Or, la fonction ψ vérifie $\psi(\Theta_+(T_u), T_u) = 0$ et $\lim_{y \rightarrow \infty} \psi(y, T_u) = 0^-$, donc elle admet un minimum dans $] \Theta_+(T_u); +\infty[$. Ce minimum est forcément un point critique, donc forcément y_0 . Ainsi, on a $\Theta_+(T_u) < y_0$. Finalement, ψ est strictement décroissante sur $]0; \Theta_+(T_u)] = I_b \cup I_c$, donc comme $\psi(0, T_u) = 1$, on a bien $\psi(y, T_u) < 1$ sur $I_b \cup I_c$.

Ainsi, on a $\underline{u}(T_u, x) \leq U_r((\sigma - s)T_u)$ sur $I_b \cup I_c$. Il suffit là encore de prendre r suffisamment petit en fonction de s, σ, T_u pour qu'on ait

$$\underline{u}(T_u, x) < U_r((\sigma - s)T_u) < \min_{x \in I_b \cup I_c} (u(T_u, x)) \leq u(T_u, x)$$

pour tout $(T_u, x) \in I_b \cup I_c$.

Preuve du lemme Les valeurs $2\sqrt{d\alpha} < s < \sigma < s_{anorm}$ étant fixées, on a montré l'existence d'une fonction q_0 , d'un $T_u(s, \sigma, q_0) > 0$ et d'un $r_1(s, \sigma, q_0, T_u) \in \mathbb{R}$ de telle sorte que la fonction \underline{u} qu'on a construite est une sous-solution pour $t > T_u$ et $x \in \mathbb{R}$. On a ensuite montré que $\underline{u}(T_u, x) < u(T_u, x)$ pour tout x . C'est donc bien une sous-solution du problème de Cauchy avec la condition initiale prise en $t = T_u$ qui vaut $u(T_u, x)$. Donc pour tout $t > T_u$ on a $\underline{u}(t, x) < u(t, x)$. Or, la stricte décroissance de \underline{u} pour $x \leq \sigma t + \Theta_+(t)$ montre que le point d'invasion $\underline{\kappa}(t)$ de la fonction \underline{u} est caractérisé par :

$$\underline{u}(t, \underline{\kappa}(t)) = \frac{1}{2}$$

Il en va d'ailleurs de même pour tout seuil strictement comprise entre 0 et 1. La vitesse sélectionnée définie par (1.4) implique qu'on peut ne regarder $\underline{\kappa}(t)$ que pour des grandes valeurs de t . Or, comme $s < \sigma$, pour t suffisamment grand on a $r + st < \sigma t$, donc $\underline{u}(t, r + st) = U_r(r) = \frac{1}{2}$ par hypothèse. Ainsi, on a directement $\underline{\kappa}(t) = r + st$ pour les grandes valeurs de t .

Or, avec $\kappa(t)$ le point d'invasion de u , on a immédiatement que $\underline{\kappa}(t) < \kappa(t)$ pour $t > T_u$, si bien qu'on obtient l'inégalité voulue pour la vitesse sélectionnée :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\underline{\kappa}(t)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa(t)}{t},$$

$$s \leq s_{sel}.$$

Cette inégalité est vraie pour un s quelconque pris dans $]2\sqrt{d\alpha}; s_{anorm}[$. Finalement, pour $(d, \alpha) \in \text{IV}$ on a $s_{anorm} \leq s_{sel}$. A noter que si on avait pris une valeur seuil $h \neq \frac{1}{2}$ dans la définition du point d'invasion (1.3), on peut refaire la même preuve en paramétrisant la famille U_r par $U_r(r) = h$. Cela termine la preuve. ■

On peut vérifier que la preuve du théorème 2 est obtenue en regroupant les résultats établis par tous les lemmes de cette section.

Bibliographie

- [1] Aronson, D. G., & Weinberger, H. F. (1978). Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics. *Advances in Mathematics*, 30(1), 33-76.
- [2] Bramson, M. (1983). Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves (Vol. 285). American Mathematical Soc..
- [3] Crandall, M. G., Ishii, H., & Lions, P. L. (1992). User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1), 1-67.
- [4] Faye, G., Holzer, M., & Scheel, A. (2016). Linear spreading speeds from nonlinear resonant interaction.
- [5] Fisher, R. A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. *Annals of eugenics*, 7(4), 355-369.
- [6] Hadeler, K. P., & Rothe, F. (1975). Travelling fronts in nonlinear diffusion equations. *Journal of Mathematical Biology*, 2(3), 251-263.
- [7] Holzer, M. (2014). Anomalous spreading in a system of coupled Fisher–KPP equations. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 270, 1-10.
- [8] Holzer, M. (2015) A proof of anomalous invasion speeds in a system of coupled Fisher-KPP equations. *DCDS-A*, 36(4) :2069-2084, 2016.
- [9] Kolmogorov, A., Petrovskii, I., and Piscounov, N (1937). Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique. *Moscow Univ. Math. Bull.*, 1 :1 25.
- [10] Weinberger, H. F., Lewis, M. A., & Li, B. (2007). Anomalous spreading speeds of cooperative recursion systems. *Journal of mathematical biology*, 55(2), 207-222.
- [11] Weinberger, H. (2012). On sufficient conditions for a linearly determinate spreading speed. *Discrete Cont. Dyn. Syst. B*, 17, 2267-2280.