Méthodes Mathématiques pour les neurosciences 28 Septembre 2011
Grégory Faye / Olivier Faugeras M2 MVA / Maths-Bio

TD 1
http://www-sop.inria.fr/members/Olivier.Faugeras/MVA/MMN11

Exercice 1. Question d'unicité

On peut montrer, en utilisant le principe de Bernouilli, que la hauteur d'eau d'un réservoir dont le fond est percé d'un orifice, vérifie une équation du type

$$\dot{h}(t) = -A\sqrt{h(t)}$$

où A est une constante positive dépendant des paramètres physiques du problème. Montrer qu'une telle équation a plusieurs solutions sous la condition initiale $h(0) = 0$. Connaissant l'état du réservoir à l'instant t_0, peut-on en déduire son état à n'importe quel instant ?

Exercice 2. Classification des équilibres en dimension 2

Le but de cet exercice est de caractériser la stabilité des équilibres et le comportement des solutions d'un système dynamique linéaire de dimension 2:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

en fonction de la trace et du déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suppose que M est inversible.

1. Déterminer l'expression du polynôme caractéristique de la matrice M:

   $$p(\lambda) = \det(\lambda Id - M)$$

   en fonction de la trace τ et du déterminant δ de M.

2. Trouver les racines de ce polynôme dans $\mathbb{C}$.

3. Trouver le ou les points fixes du système dynamique (1):

4. Valeurs propres réelles:

   (i) Trouver une condition en fonction de τ et δ pour que les valeurs propres soient réelles.

   (ii) Dans ce cas, trouver une condition en fonction de δ pour que l'équilibre soit un noeud-col.

   (iii) Trouver une condition sur τ et δ pour que l'équilibre soit attractif (puit).

   (iv) Trouver une condition sur τ et δ pour que l'équilibre soit répulsif (source).

5. Valeurs propres complexes:

   (i) Trouver une condition en fonction de τ uniquement pour que l'équilibre soit attractif (foyer stable).

   (ii) Trouver une condition en fonction de τ uniquement pour que l'équilibre soit répulsif (foyer instable).

6. Tracer sur un diagramme (δ, τ) la stabilité du point fixe et les différents comportements autour du point fixe.

Exercice 3. Fréquence de décharge d'intègres-et-tirent

1. On considère un neurone intègre-et-tire simple:

$$\tau \frac{dV}{dt} = E_L - V + RI$$

avec seuil θ et réinitialisation V_r. Trouver la condition pour laquelle le neurone spike. Calculer dans ce cas la fréquence de décharge (i.e. le nombre de spike par unité de temps) du neurone en fonction de I.

2. On considère l'intègre-et-tire quadratique:

$$\tau \frac{dV}{dt} = (V - V_T)(V - E_L) + I.$$

Il n'y a pas de seuil dans ce modèle, et on considère qu'un spike est émis quand le potentiel de membrane atteint $+\infty$ quand le système explose en temps fini. Le système est alors réinitialise à $-\infty$ (ou une constante v_r). Donner une condition pour que ce neurone spike. Sous cette condition, calculer la fréquence de décharge. [On donne: $\int_0^t \frac{dx}{x^2+1} = \arctan(t)$ et $\int_0^t \frac{dx}{x^2-1} = \text{arctanh}(t)$]

Exercice 4. Intégration Synaptique

On considère un neurone intègre et tire à fuite, qui reçoit un spike tous les intervalles de temps T, qui le dépolarise instantanément d'une valeur constante $a > 0$ (i.e. $V(t) = V(t^-) + a$ en un temps t où un spike arrive). La dynamique du neurone est donc

$$\tau \frac{dV}{dt} = -V$$

et il émet un spike dès qu'il atteint le seuil θ. On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le potentiel de membrane est à sa valeur de repos $V(0) = 0$ et que le premier spike arrive au temps T.

Trouver une condition sur a et T pour que le neurone spike. Dans le cas où le neurone émet une impulsion, trouver le temps du premier spike.

Exercice 5. Le neurone θ Le neurone theta est un modèle abstrait de la génération du potentiel d'action. Le potentiel est représenté par la variable $\theta \in \mathcal{S}^1$ ($\mathcal{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est le cercle, i.e., $[0, 2\pi]$ où 0 et 2π sont identifiés) et suit l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\theta} = 1 - \cos\theta + (1 + \cos\theta)I$$

où I est le courant injecté. On considère que le neurone émet un potentiel d'action lorsque θ passe le point π.

1. Montrer que pour $I < 0$, il existe deux points d'équilibre pour le système, dont un est stable est l'autre instable. Montrer que toute solution n'ayant pas pour condition initiale le point d'équilibre instable converge vers le point d'équilibre stable.

2. Pour $I > 0$, montrer qu'il n'y a pas de point d'équilibre. En déduire que les trajectoires sont périodiques et que le neurone émet des potentiels d'action régulièrement espacés. Calculer la fréquence d'émission des spikes. Pour cela, on prouvera que dans ce cas, la solution s'écrit:

$$\theta(t) = 2 \arctan\left(\tan(\sqrt{I}t + \alpha\sqrt{I})/\sqrt{I}\right)$$

où α est une constante d'intégration donnée par la condition initiale.

3. Que se passe-t-il pour $I = 0$?

Remarque 1. Ceci est un premier exemple de ce qu'on appelle une *bifurcation*. Il s'agit ici d'un changement dans la *nature* et le *nombre* de points d'équilibres. Cette bifurcation s'appelle une *saddle-node bifurcation on limit cycle* (nœud-col sur un cycle limite), et a été introduite par Ermentrout et Kopell (1986)