Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques

M1F, Master 1, 4ème année, Mathématiques Fondamentales

Topologie - Examen du 30 mai 2007
Durée : 4 heures

---

1. On considère le disque unité
$$D^2 = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\| \leq 1\}$$
et la relation d'équivalence $\sim$ dont les classes sont
- les singletons $\{u\}$ pour $\|u\| < 1$
- les doubletons $\{u, -u\}$ pour $\|u\| = 1$.
Montrer que l'espace topologique quotient $D^2/\sim$ est compact. A quel espace connu (sphère, tore, espace projectif, bande de Möbius, bouteille de Klein, boule ...) est-il homéomorphe (on démande une démonstration) ? $D^2/\sim$ est-il une variété ?
2. Montrer que la sphère S^3 est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant deux tores "pleins" $D^2 \times S^1$ et $S^1 \times D^2$ au moyen de l'application identique
$$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1 \xrightarrow{id} S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2.$$
3. Soit $V = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ un champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que V est un champ complet.
   (b) Calculer l'indice $ind_0 V$ de V à l'origine $0 = (0,0)$.
   (c) Montrer que V induit un champ de vecteurs $\tilde{V}$ de l'espace $D^2/\sim$.
   (d) Est-ce que $\tilde{V}$ est le champ-gradient d'une fonction de Morse sur $D^2/\sim$?
4. Soit $X = \mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$ la somme connexe de deux plans projectifs réels.
   (a) A quel espace connu est-il homéomorphe X ? Justifier la réponse.
   (b) Construire un complexe cellulaire homéomorphe à X.
   (c) Calculer l'homologie de X à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et dans $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
5. Soit $[x_0, x_1, x_2]$ des coordonnées homogènes du plan projectif $\mathbb{RP}^2$. On pose
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{RP}^2 & \to & \mathbb{R} \\ [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & f(x_0, x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2}. \end{array}$$
   (a) Calculer les points critiques de f. Est-ce que f est une fonction de Morse sur $\mathbb{RP}^2$?
   (b) On admet que f est de Morse. Calculer les indices des points critiques de f.
   (c) En déduire la caractéristique d'Euler $\chi(\mathbb{RP}^2)$ de $\mathbb{RP}^2$.
6. On désigne par K^2, S^2 la bouteille de Klein et la sphère de dimensiion deux.
   (a) Existe-t-il un espace topologique M et un revêtement $S^2 \to M$ d'ordre deux, quatre ?
   (b) Existe-t-il un espace topologique M et un revêtement $K^2 \to M$ d'ordre quatre ?