Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques

M1F, Master 1, $4^{\text{ème}}$ année, Mathématiques Fondamentales

---

Topologie - Examen du 11 séptembre 2007
Durée : 4 heures

---

1. On considère le disque unité
$$D^3 = \{u \in \mathbb{R}^3 : \|u\| \leq 1\}$$
et la relation d'équivalence $\sim$ dont les classes sont
- les singletons $\{u\}$ pour $\|u\| < 1$
- les doubletons $\{u, -u\}$ pour $\|u\| = 1$.
Montrer que l'espace topologique quotient $D^3/\sim$ est compact. A quel espace connu est-il homéomorphe (on demande une démonstration) ? $D^3/\sim$ est-il une variété ?
2. Quelle variété on obtient en collant deux bandes de Möbius le long de leurs bords ?
3. Soit $V = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$ un champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que V est un champ complet.
   (b) Calculer l'indice $ind_0 V$ de V à l'origine $0 = (0, 0)$.
   (c) Montrer que V induit un champ de vecteurs $\tilde{V}$ de l'espace $\mathbb{RP}^2$.
   (d) Est-ce que $\tilde{V}$ est le champ-gradient d'une fonction de Morse sur $\mathbb{RP}^2$?
4. Soit $X = \mathbb{RP}^2 \sharp T^2$ la somme connexe d'un plan projectif réel et d'un tore.
   (a) Construire un complexe cellulaire homéomorphe à X.
   (b) Calculer l'homologie de X à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et dans $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.
5. On désigne par K^2, S^2 la bouteille de Klein et la sphère de dimensiion deux.
   (a) Existe-t-il un espace topologique M est un revêtement $S^2 \to M$ d'ordre deux, quatre ?
   (b) Existe-t-il un espace topologique M est un revêtement $K^2 \to M$ d'ordre deux ?