**Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques**

M1F, Master 1, $4^{\text{ème}}$ année, Mathématiques Fondamentales

---

Topologie - Devoir

---

1. On considère le disque unité
$$D^2 = \{u \in \mathbb{R}^2 : \|u\| \leq 1\}$$
et la relation d'équivalence $\sim$ dont les classes sont
- les singletons $\{u\}$ pour $\|u\| < 1$
- les doubletons $\{u, -u\}$ pour $\|u\| = 1$.
Montrer que l'espace topologique quotient $D^2/\sim$ est compact. A quel espace connu (sphère, tore, espace projectif, bande de Möbius, bouteille de Klein, boule ...) est-il homéomorphe (on démande une démonstration) ? $D^2/\sim$ est-il une variété ?
2. Montrer que la sphère $S^3$ est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant deux tores "pleins" $D^2 \times S^1$ et $S^1 \times D^2$ au moyen de l'application identique
$$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1 \xrightarrow{id} S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2.$$
3. Soit $V = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$ un champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
   **(a)** Montrer que $V$ est un champ complet.
   **(b)** Calculer l'indice $ind_0 V$ de $V$ à l'origine $0 = (0, 0)$.
   **(c)** Montrer que $V$ induit un champ de vecteurs $\tilde{V}$ de l'espace $D^2/\sim$.
4. **(a)** Soit $D^2$ un disque plongé dans l'espace projectif $\mathbb{RP}^2$, $D^2 \subset \mathbb{RP}^2$. Montrer que $\mathbb{RP}^2 \setminus D^2$ est homéomorphe à une bande de Möbius.
   **(b)** Quelle variété on obtient en collant deux bandes de Möbius le long de leurs bords ?
   **(c)** En déduire que la somme connexe $\mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$ est homéomorphe à une bouteille de Klein.
5. Soit $\Gamma$ le groupe des isométries du plan $\mathbb{R}^2$ engendré par
$$T_1(x, y) = (x, y + 1), T_2(x, y) = (x + 1/2, -y)$$
et soit $\tilde{\Gamma}$ le groupe engendré par $T_1$, $T_2^2$. A quel espace connu est homéomorphe $\mathbb{R}^2/\Gamma$, $\mathbb{R}^2/\tilde{\Gamma}$. Montrer que les projections
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\tilde{\Gamma} \to \mathbb{R}^2/\Gamma$$
sont des revêtements. Montrer que chaque revêtement est principal, calculer la suite exacte associé et déduire le groupe fundamental. Montrer que $T_1T_2T_1 = T_2$, $T_1T_2^2 = T_2^2T_1$.