Michèle Audin

TOPOLOGIE : REVÊTEMENTS ET GROUPE FONDAMENTAL

Michèle Audin

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS,
7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.

E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr

Url : http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin

***Classification mathématique par sujets* (2000).** 54–01, 57–01, 54Bxx, 57M10, 14F35, 57M05.

Mots clefs. exponentielle, logarithme, topologie algébrique, revêtements, groupe fondamental, théorème de van Kampen.

Version du 22 septembre 2004

Il connaît d'autres noms d'embarcations locales (gondolino, caorlina, mascareta...) mais ne les révèle point. Parce que ce serait gaspiller son souffle, se dit-il, parce que certaines choses n'intéressent plus personne [...]

Fruttero *&* Lucentini [**FL88**]

TOPOLOGIE : REVÊTEMENTS ET GROUPE FONDAMENTAL

Michèle Audin

Résumé. Ces notes de cours sont une introduction aux revêtements et au groupe fondamental, avec des rappels de topologie, notamment sur les quotients, des exemples, des ouvertures dont j'espère qu'elles intéresseront les lecteurs, cent quarante-cinq exercices, quarante-cinq figures et trente-neuf diagrammes commutatifs.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION : QUELQUES PROBLÈMES

Un problème de points fixes. Soit f une application continue

$$f : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1].$$

Supposons que f n'ait aucun point fixe. Alors la formule

$$x \longmapsto \frac{x - f(x)}{|x - f(x)|}$$

définit une application continue de $[-1, 1]$ dans $\{-1, 1\}$. Elle envoie -1 sur -1 et 1 sur 1, donc elle est surjective. Comme $[-1, 1]$ est connexe, ce n'est pas possible. On a ainsi démontré le cas $n = 1$ du théorème suivant.

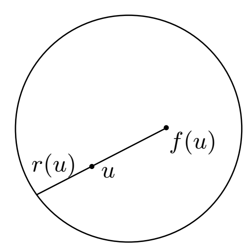
***Théorème* (Brouwer).** *Toute application continue $f : B^n \to B^n$ a un point fixe.*

Dans cet énoncé, B^n désigne la boule unité de $\mathbf{R}^n$

$$B^n = \{u \in \mathbf{R}^n \mid \|u\| \leq 1\}.$$

C'est bien l'intervalle $[-1, 1]$ quand $n = 1$.

Essayons d'adapter la démonstration ci-dessus à la dimension n. On suppose que f n'a pas de point fixe, on considère, pour tout point u, le point $r(u)$ intersection de la demi-droite d'origine $f(u)$ passant par u avec la sphère unité (comme sur la figure ci-contre). L'application r envoie la boule unité sur la sphère S^{n-1} et se restreint, sur la sphère, à l'identité. De plus, r est continue, comme on le voit en écrivant



$$r(u) = u + \lambda(u - f(u)) \qquad \lambda \geq 0$$

et en calculant λ en fonction de u (en imposant $\|r(u)\|^2 = 1$).

Ainsi r est-elle une application continue de B^n dans la sphère unité S^{n-1}, qui se restreint à la sphère en l'identité. Il se trouve que ceci ne peut pas exister. Une méthode pour le démontrer est de remplacer la notion de connexité utilisée dans le cas $n = 1$ par une notion plus générale, qui arrive à distinguer la boule et la sphère.

Dans ce cours, on va mettre en place une technique qui permet notamment de démontrer le cas $n = 2$ du théorème de Brouwer. Essentiellement, le cercle est troué mais pas le disque[1], et on va formaliser cette remarque.

[1] Tous les tigres qui ont dû crever un disque en papier pour traverser un cerceau comprendront ce que je veux dire.

Problèmes d'homéomorphismes. La boule fermée $B^1 = [-1, 1]$ n'est pas homéomorphe à la boule fermée B^n pour $n \geq 2$: le complémentaire d'un point intérieur à B^1 n'est pas connexe alors que le complémentaire d'un point dans B^n est toujours connexe par arcs pour $n \geq 2$. On peut montrer que B^n et B^m ne sont homéomorphes que si $n = m$. L'outil mis en place dans ces notes (le groupe fondamental) permettra de montrer que B^2 n'est homéomorphe à B^n que si $n = 2$ (voir l'exercice IV.33).

La propriété essentielle du cercle (être troué) qui va être utile n'est pas sans évoquer $\mathbf{C} - \{0\}$ et le douloureux problème de l'existence du logarithme complexe. Ce cours commence donc par des rappels(2) sur l'exponentielle et le (!) logarithme complexe. Il continue par des « rappels » de topologie générale, avant de se consacrer au groupe fondamental et aux revêtements.

Ces notes

Il s'agit de notes d'un cours professé devant les étudiants de magistère deuxième année à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.

Les exemples et les exercices. On ne comprend rien à cette théorie si on n'a pas un minimum d'exemples standard en tête. Je me souviens avoir rencontré des étudiants très brillants qui savaient que « π_1 est un foncteur », qui avaient même entendu parler d'une équivalence de catégories expliquant qu'on parle de revêtement « galoisiens » comme on parle d'extension « galoisienne »... mais qui ne savaient rien sur les revêtements du cercle.

J'ai donc fait un effort pour que ce texte contienne beaucoup d'exemples, souvent présentés sous forme d'exercices. Ces exercices sont des « essentiels », des « fondamentaux ». Ils sont accompagnés d'une étoile(3). On doit savoir les résoudre, souvent en connaître le résultat.

Il y a aussi, on me l'a fait remarquer et j'en conviens, des exercices trop difficiles, mais il fallait, d'une part que certains résultats figurent dans ce texte d'une façon ou d'une autre (par exemple ceux donnés dans l'exercice II.10) et, d'autre part, qu'il contienne des exercices pour les étudiants qui travaillent seuls et vite.

Je me suis aussi donné la peine de faire beaucoup de figures. Il faut prendre l'habitude d'en faire !

Références. Ces notes ne présentent pas une grande originalité par rapport à leurs sources (principalement [**God71**] et [**Mas67**]). J'ai adopté le point de vue de [**God71**], à savoir utiliser les revêtements pour démontrer les résultats principaux sur les groupes fondamentaux. Mais j'ai souvent obliqué vers [**Mas67**] quand j'en trouvais l'argumentation plus claire. J'y ai en particulier « copié » la construction du revêtement universel (§ V-4). À la suggestion de Michael Heusener, j'ai aussi utilisé [**Mun00**], notamment pour les démonstrations de V-3.1 et V-3.6.

Si, comme topologue ou géomètre, je connais beaucoup d'espaces topologiques et de groupes topologiques abstraits que j'utilise quotidiennement, il n'en est pas de même pour les étudiants qui subissent ce cours. D'autre part, la plupart des revêtements qu'on rencontre dans la nature ou dans les mathématiques proviennent de fonctions de variables complexes. J'ai donc insisté sur l'exponentielle complexe et les revêtements ramifiés (j'ai utilisé [**Car61**], comme toujours, et [**Rey90**]) et j'ai donné de nombreux exemples d'espaces topologiques et de groupes opérant.

Remerciements. Je remercie les étudiants pour leur aide et leurs questions (passées ou à venir). En plus des sources bibliographiques mentionnées ci dessus, j'ai fait un grand usage des feuilles d'exercices que j'avais utilisées à Orsay pour les travaux dirigés d'un cours analogue(4) dans les années 1981-85

(2) J'appelle « rappels » ce que j'aurais aimé que les étudiants sachent en arrivant à mon cours.

(3) Contrairement à une tradition bien établie, j'ai « étoilé » les exercices indispensables, le plus souvent faciles.

(4) professé par Luc Illusie puis Renée Elkik

et dont je n'étais pas l'unique auteure. Je remercie donc tous ceux qui avaient contribué à ces feuilles d'exercices.

Ces notes ont bénéficié de la (re-)lecture des polycopiés[5] des cours donnés par Cartan à Orsay dans les années soixante-dix. Je remercie Claude Sabbah de les avoir conservés, ainsi que pour de multiples discussions, plusieurs énoncés et/ou solutions d'exercices et d'innombrables virgules.

Enfin, cette version a bénéficié, en plus des corrections suggérées ou réclamées par les étudiants (proches ou lointains, notamment de Fabrice Krieger, lecteur pointilleux, que je remercie pour son insistance), des commentaires de plusieurs collègues. Je remercie Rached Mneimné pour ses remarques (il est responsable de la présence de cœurs dans ce texte, page 46), ainsi qu'Hélène Davaux et François Maucourant. Surtout, je veux remercier Michael Heusener et Jean-Marie Lescure, qui ont utilisé la version précédente de ce poly à Clermont-Ferrand, pour leurs critiques et leurs suggestions détaillées qui m'ont permis d'améliorer substantiellement ces notes. En plus de multiples corrections (y compris d'énoncés vraiment faux), l'introduction des opérations proprement discontinues et la rédaction nettoyée et éclaircie de la démonstration du théorème de van Kampen au chapitre VI doivent beaucoup à Michael.

Les fautes et maladresses restantes sont, bien entendu, de ma seule responsabilité.

[5] J'y ai copié, notamment, la démonstration claire de la trivialité des revêtements sur les cubes.

CHAPITRE I

PRÉLUDE : EXPONENTIELLE ET SURTOUT LOGARITHME

1. Exponentielle complexe

Elle est définie par la série entière

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

dont le rayon de convergence est évidemment infini. La convergence absolue implique que l'on peut calculer

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b^\ell}{\ell!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!}$$

ce qui fait que la fonction exponentielle vérifie la formule d'addition (ou « équation fonctionnelle »)

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b) \qquad \forall\, a, b \in \mathbf{C}.$$

Cette relation implique que $e^0 = 1$ et que $e^z \cdot e^{-z} = 1$. Les coefficients de la série sont des nombres réels, ce qui fait que e^x est réel pour x réel. On appelle e le nombre (réel) $e = e^1$ (ce qui justifie la notation !). Le théorème suivant résume les propriétés les plus importantes de la fonction exponentielle. Voir [**Rud75**] pour les démonstrations.

Théorème 1.1

(1) *L'application* $\exp$ *est une surjection* $\mathbf{C} \to \mathbf{C} - \{0\}$.
(2) *Elle est égale à sa dérivée* ($\exp' = \exp$).
(3) *La restriction de* $\exp$ *à* $\mathbf{R}$ *est une fonction réelle strictement croissante et positive qui vérifie*

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0.$$

(4) *Il existe un nombre réel positif, noté* π, *tel que* $\exp(i\pi/2) = i$ *et tel que* $e^z = 1$ *si et seulement si* $z/(2i\pi) \in \mathbf{Z}$.
(5) *La fonction* $\exp$ *est périodique de période* $2i\pi$.
(6) *L'application* $t \mapsto e^{it}$ *envoie l'axe réel sur le cercle unité.*

La figure 1 montre quelques droites parallèles aux axes réel et imaginaire et leurs images par l'exponentielle. Voir aussi l'exercice I.1.

Logarithme népérien. La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$. Elle admet une fonction réciproque continue et strictement croissante $]0, +\infty[\to \mathbf{R}$, appelée « logarithme népérien » et notée log. On remarquera que $\log(1) = 0$ et que, comme $\exp' = \exp$, $\log'(x) = 1/x$.

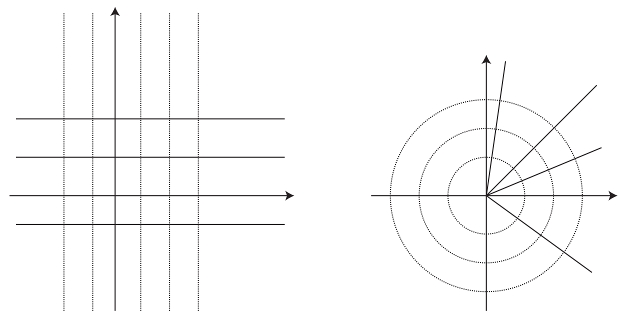


FIGURE 1. Images des parallèles aux axes par l'exponentielle

Arguments d'un nombre complexe. Appelons S^1 le cercle unité :

$$S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}.$$

On a vu (théorème 1.1) que l'application $y \mapsto e^{iy}$ est une application continue et un homomorphisme surjectif de groupes $\mathbf{R} \to S^1$. On a aussi déterminé son noyau, le groupe des multiples entiers de 2π. Ainsi l'exponentielle définit un *isomorphisme* de groupes

$$\varphi : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \longrightarrow S^1.$$

Si on munit $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ de la topologie quotient[(1)], φ devient un homéomorphisme (exercice II.12). L'application réciproque associe, à tout nombre complexe de module 1, une classe modulo $2\pi\mathbf{Z}$ de réels, ses arguments. De même, si $z \neq 0$, on définit $\arg(z) = \arg(z/|z|)$, à l'addition d'un multiple entier de 2π près.

2. Logarithme complexe

Il s'agit d'inverser la fonction exponentielle... dont nous savons fort bien qu'elle n'est *pas* inversible, n'étant pas injective. On peut donc s'attendre à des problèmes. Nous savons cependant pourquoi elle n'est pas injective (en d'autres termes nous connaissons le noyau de l'homomorphisme de groupes exp).

Donnons-nous un nombre complexe t et cherchons tous les nombres complexes z tels que $e^z = t$. Il est nécessaire que t ne soit pas nul. Écrivons, après avoir choisi un argument de t,

$$t = |t| \exp(i \arg t)$$

et cherchons z sous la forme $z = x + iy$, c'est-à-dire résolvons l'équation

$$e^x e^{iy} = |t| \exp(i \arg t).$$

On trouve

$$x = \log |t|, \qquad y = \arg t$$

cette deuxième relation étant à manier avec les pincettes habituelles. Donc on aimerait écrire

$$z = \log |t| + i \arg t$$

relation dans laquelle on voit bien, comme il fallait s'y attendre, que le logarithme complexe n'est pas bien défini, ou qu'il est défini à l'addition d'un multiple entier de $2i\pi$ près.

Définition 2.1. On dit qu'une fonction *continue* f de la variable complexe t, définie sur un ouvert connexe $U \subset \mathbf{C}$ ne contenant pas 0, est *une détermination du logarithme* sur U si

$$\forall\, t \in U, \quad \exp(f(t)) = t.$$

(1) Voir au besoin le § 2.

Remarque 2.2. Une telle détermination n'existe pas forcément. C'est le cas par exemple sur $U = \mathbf{C} - \{0\}$, comme on va le voir dans la proposition 2.4. Par contre, s'il en existe une, il y en a beaucoup d'autres, comme le précise la proposition suivante.

Proposition 2.3. *Si f est une détermination du logarithme sur U (ouvert connexe ne contenant pas 0), toute autre détermination du logarithme sur U est de la forme $f + 2ik\pi$ pour un certain entier k. Réciproquement, toute $f + 2ik\pi$ est une détermination du logarithme sur U.*

Démonstration. Supposons que f et g soient deux déterminations du logarithme sur U. Par définition, elles sont continues sur U. Donc la fonction

$$h(t) = \frac{f(t) - g(t)}{2i\pi}$$

est continue sur l'ouvert *connexe* U. Elle ne prend que des valeurs entières et donc est constante. La réciproque est claire. □

Proposition 2.4. *Il n'existe pas de détermination (continue) du logarithme sur $\mathbf{C} - \{0\}$.*

Démonstration. Supposons qu'une telle détermination existe, appelons-la f. Posons $u(z) = \operatorname{Im} f(z)$. Alors u serait une détermination continue de l'argument sur $\mathbf{C} - \{0\}$.

Restreignons-nous au cercle S^1 et posons $v(\theta) = u(e^{i\theta})$, définissant ainsi une fonction $v : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue et périodique de période 2π. Pour tout θ, θ et $v(\theta)$ sont des arguments de $e^{i\theta}$, donc il existe un entier $n(\theta)$ tel que

$$v(\theta) - \theta = 2n(\theta)\pi.$$

Comme v est continue, n est une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{Z}$, donc elle est constante. Il existe donc un entier n tel que

$$v(\theta) = \theta + 2n\pi.$$

La contradiction vient maintenant du fait que v doit aussi être périodique :

$$\theta + 2n\pi = v(\theta) = v(\theta + 2\pi) = (\theta + 2\pi) + 2n\pi.$$

□

Développement en série du logarithme

Proposition 2.5. *La série entière*

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

converge pour $|z| < 1$. La somme de la série

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(t-1)^n}{n}$$

est une détermination du logarithme sur le disque ouvert de centre 1 et de rayon 1.

Démonstration. Il est clair que le rayon de convergence de la série entière est 1 et donc que la série définissant $f(t)$ converge pour $|t - 1| < 1$. La fonction f vérifie $f(1) = 0$ et

$$f'(t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (t-1)^n = \frac{1}{t}$$

donc sa restriction aux t réels (dans $]0, 2[$) est $\log(t)$. La fonction $\exp \circ f$ est analytique comme composée de deux fonctions analytiques, coïncide avec t pour t réel, donc, en vertu du théorème du prolongement analytique, elle coïncide avec t partout. □

On a ainsi montré l'existence de déterminations *analytiques* du logarithme sur le disque de centre 1 et de rayon 1. Il en existe sur tous les disques contenus dans $\mathbf{C} - \{0\}$:

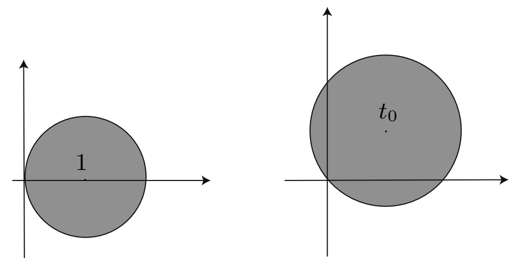


FIGURE 2

Corollaire 2.6. *Soit t_0 un nombre complexe non nul et soit θ_0 un argument de t_0. Sur le disque $|t-t_0|<|t_0|$, la série*

$$g(t)=\log|t_0|+i\theta_0+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^n$$

définit une détermination analytique du logarithme.

Démonstration. On applique la proposition 2.5 qui dit que la série

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{t-t_0}{t_0}\right)^n$$

converge, sur le disque défini par $\left|\frac{t}{t_0}-1\right|<1$, vers $f(t/t_0)$. Ainsi

$$\exp g(t)=|t_0|\,e^{i\theta_0}\exp f\left(\frac{t}{t_0}\right)=t_0\frac{t}{t_0}=t. \qquad \square$$

La détermination « principale » du logarithme. Traditionnellement, il y a une détermination du logarithme considérée (ce n'est pas mon avis) comme meilleure que les autres. Commençons par définir une fonction réelle de variable réelle, la fonction arcsin (prononcer « arcsinus »).

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $]-\pi/2,\pi/2[$. Elle admet donc une fonction réciproque strictement croissante

$$\arcsin :]-1,1[\longrightarrow]-\pi/2,\pi/2[.$$

Proposition 2.7. *Soit U_π le complémentaire dans $\mathbf{C}$ de l'ensemble des réels négatifs ou nuls. Les formules*

$$f(t)=\log|t|+i\begin{cases}\arcsin(y/|t|) & \text{si } x\geq 0\\ \pi-\arcsin(y/|t|) & \text{si } x\leq 0 \text{ et } y\geq 0\\ -\pi-\arcsin(y/|t|) & \text{si } x\leq 0 \text{ et } y\leq 0\end{cases}$$

(avec $x=\mathrm{R\acute{e}}\,t$, $y=\mathrm{Im}\,t$) définissent une fonction f sur U_π qui est une détermination analytique du logarithme.

Démonstration. Montrons d'abord que ces formules définissent bien une fonction f continue sur U_π. Elle est continue sur le demi-plan $x\geq 0$ et sur chacun des deux quadrants du demi-plan $x<0$. Il suffit de vérifier que les différentes formules donnent la même chose sur l'axe des y (privé de 0).

Si $x=0$ et $y>0$, la première formule donne $\log|t|+i\pi/2$ et la deuxième $\log|t|+i(\pi-\pi/2)$. De même, si $x=0$ et $y<0$, les première et troisième formule donnent respectivement $\log|t|-i\pi/2$ et $\log|t|-i(\pi-\pi/2)$. Donc f est bien continue sur U_π. De plus, il est clair que les formules en arcsin définissent un argument et donc que f est une détermination du logarithme sur U_π.

Il reste à vérifier qu'elle est analytique. Montrons donc qu'elle a un développement en série entière au voisinage de chaque point de U_π. Soit donc $t_0\in U_\pi$ et soit D un disque ouvert de centre t_0 contenu dans U_π. Le disque D est contenu dans le disque $|t-t_0|<|t_0|$ (figure 4) et donc, sur D, nous

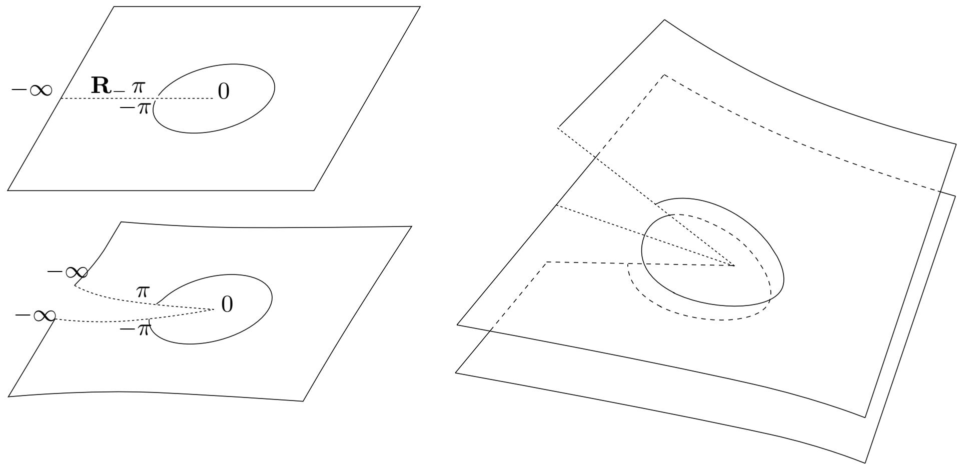


FIGURE 3. La détermination principale du logarithme... et les autres

connaissons deux déterminations du logarithme, celle donnée par le corollaire 2.6 et celle que nous sommes en train de considérer. En vertu de la proposition 2.3, elles diffèrent d'un multiple de $2i\pi$. Comme l'une est analytique, l'autre l'est aussi. □

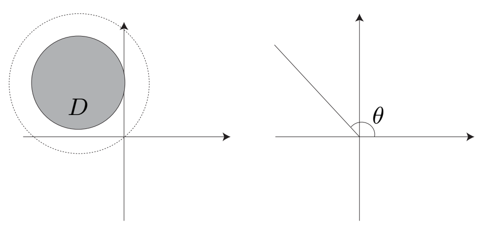


FIGURE 4. Où l'on peut définir un logarithme...

Remarque 2.8. Les formules données dans l'énoncé servent à convaincre les lecteurs que la fonction f est continue. Il est assez rare qu'on ait effectivement besoin de calculer un arcsinus pour évaluer un argument.

C'est cette détermination qu'on appelle la détermination « principale » du logarithme. Mis à part le fait qu'elle coïncide avec le logarithme népérien sur les réels positifs, elle n'a vraiment rien de particulier.

Corollaire 2.9. *Si $\theta \in \mathbf{R}$, soit U_θ l'ensemble des nombres complexes dont θ n'est pas un argument. Il existe dans U_θ des déterminations analytiques du logarithme.*

Démonstration. On ramène simplement U_θ (figure 4) sur U_π par une rotation. Soit $\varphi = \theta - \pi$, de sorte que la rotation

$$z \longmapsto e^{-i\varphi} z$$

envoie la demi-droite d'argument θ sur celle d'argument π ($y = 0$, $x < 0$) et U_θ sur U_π. Posons

$$g(t) = f\left(e^{-i\varphi} t\right) + i\varphi$$

où f est la fonction définie par la proposition 2.7. Alors g est analytique sur U_θ et

$$\exp g(t) = \exp\left(f\left(e^{-i\varphi} t\right)\right) e^{i\varphi} = e^{-i\varphi} t e^{i\varphi} = t.$$ □

Remarque 2.10. Il reste à répondre à la question : sur quels ouverts de **C** existe-t-il une détermination continue (donc analytique) du logarithme ? Voir le corollaire V-3.12.

Exercices

Exercice * ***I.1***. Dessiner les images par l'application exponentielle des demi-droites passant par l'origine.

Exercice * ***I.2***. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ ne contenant pas 0. On suppose que f est une fonction analytique sur U et qu'elle vérifie

$$f'(t) = \frac{1}{t} \text{ et } \exists\, t_0 \text{ tel que } \exp f(t_0) = t_0.$$

Montrer que f est une détermination du logarithme.

Exercice * ***I.3* (Une démonstration fausse)**. Montrer qu'il existe une détermination f du logarithme dans

$$\mathbf{C} - \{z \mid \mathrm{Ré}(z) = 0, \mathrm{Im}(z) < 0\}$$

telle que $f(1) = 0$. Calculer $f(i)$, $f(-1)$, $f(-2)$, $f(2-3i)$.

La suite d'égalités suivantes est une « démonstration » du fait que, si log est une détermination du logarithme, on a $\log(-z) = \log(z)$:

$$\begin{aligned}\log(-z)^2 &= \log(z^2)\\ \log(-z) + \log(-z) &= \log(z) + \log(z)\\ 2\log(-z) &= 2\log(z)\\ \log(-z) &= \log(z).\end{aligned}$$

Qu'en pensez-vous ?

Exercice * ***I.4***. Dessiner les images par l'application $z \mapsto z^2$ des droites parallèles à l'axe réel, à l'axe imaginaire.

Exercice * ***I.5***. Quelle est l'image d'un secteur angulaire de sommet 0 par l'application $z \mapsto z^2$? par $z \mapsto z^n$?

Exercice * ***I.6***. Soit U un ouvert connexe de $\mathbf{C}$ sur lequel existe une détermination du logarithme. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f : U \to \mathbf{C}$ telle que

$$\forall\, z \in U \quad f(z)^n = z.$$

Combien existe-t-il de telles fonctions ?

Exercice I.7. On considère les deux séries

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n} \qquad \text{et} \qquad f_2(z) = i\pi + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}.$$

Démontrer qu'il existe un ouvert connexe U contenant les deux disques ouverts

$$\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\} \text{ et } \{z \in \mathbf{C} \mid |z-2| < 1\}$$

et une fonction g analytique sur U telle que

$$g(z) = f_1(z) \text{ si } |z| < 1 \text{ et } g(z) = f_2(z) \text{ si } |z-2| < 1.$$

CHAPITRE II

RAPPELS DE TOPOLOGIE

Dans ce chapitre, je réunis quelques notions de topologie qui seront utilisées dans la suite. Voir par exemple [**Mun00, Ska01**].

1. Propriétés locales

Une propriété locale est une propriété qui est vérifiée au voisinage de chaque point d'un espace. Dans ces notes, on va voir beaucoup d'exemples de propriétés locales qui ne sont pas satisfaites *globalement* par les espaces considérés.

Homéomorphisme local. Une application f de l'espace topologique E vers l'espace topologique F est un *homéomorphisme local* si pour tout point x de E il existe un voisinage ouvert U de x dans E et un voisinage ouvert V de $f(x)$ dans F tels que la restriction de f soit un homéomorphisme de U sur V.

Proposition 1.1. *Un homéomorphisme local est une application ouverte.*

Démonstration. Soit $f : E \to F$ un homéomorphisme local. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de E. Montrons que $f(\mathcal{O})$ est un ouvert de F. Soit $y \in f(\mathcal{O})$, avec $y = f(x)$ pour un x dans $\mathcal{O}$. Soit U un ouvert de E contenant x et V un ouvert de F contenant y tels que

$$f\,|_U : U \longrightarrow V$$

soit un homéomorphisme. Alors, $U \cap \mathcal{O}$ est un ouvert de E et $f(U \cap \mathcal{O}) = V \cap f(\mathcal{O})$ est un ouvert puisque $f\,|_U$ est un homéomorphisme. Donc $f(\mathcal{O}) \supset V \cap f(\mathcal{O})$ est un ouvert contenant y et contenu dans $f(\mathcal{O})$, ce qui montre que ce dernier est ouvert. □

Connexité locale. Un espace topologique E est *localement connexe* si tout point de E possède un système fondamental de voisinages connexes. Par exemple, les espaces discrets sont localement connexes. On a une notion analogue de connexité par arcs locale. Je renvoie à [**God71**] pour des rappels sur la connexité et la connexité par arcs.

2. La topologie quotient

Soient E un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Appelons

$$q : E \to E/\mathcal{R}$$

la projection qui, à tout point de E, associe sa classe d'équivalence.

Proposition 2.1. *Il existe une unique topologie, la topologie quotient, sur $E/\mathcal{R}$ telle que :*

(1) *La projection q est continue.*

(2) *Si X est un espace topologique et $f : E \to X$ une application continue telle que, si $x \mathcal{R} y$, $f(x) = f(y)$, alors l'application induite $\overline{f} : E/\mathcal{R} \to X$ est continue.*

Remarque 2.2. Les parties $q^{-1}(U)$ dans E sont *saturées*, c'est-à-dire sont réunions des classes d'équivalence de leurs points.

Exemple 2.3. Considérons le quotient de $\mathbf{R}^2$ par la relation d'équivalence

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \text{ si et seulement si } x - x' \in \mathbf{Z} \text{ et } y - y' \in \mathbf{Z}.$$

Le quotient est quelque chose de compliqué. La proposition affirme que, pour comprendre cet espace compliqué, il suffit de comprendre les ouverts de $\mathbf{R}^2$ (une chose simple...).

Démonstration de la proposition. On montre d'abord l'existence de cette topologie. D'après la première propriété, un ouvert U de $E/\mathcal{R}$ doit être tel que $q^{-1}(U)$ soit un ouvert de E. On vérifie sans mal que la famille $\mathcal{T}$ des parties U de $E/\mathcal{R}$ telles que $q^{-1}(U)$ soit un ouvert de E est une topologie sur $E/\mathcal{R}$... pour laquelle q est continue.

Soit $f : E \to X$ une application compatible avec $\mathcal{R}$. Soit V un ouvert de X. Alors $f^{-1}(V)$ est un ouvert (f est continue) saturé (f est compatible avec $\mathcal{R}$). De plus

$$q^{-1}(\overline{f}^{-1}(V)) = f^{-1}(V) \text{ est donc ouvert,}$$

donc $\overline{f}^{-1}(V)$ est ouvert et $\overline{f}$ est continue. Donc $\mathcal{T}$ satisfait aux propriétés espérées.

On finit par l'unicité. Soit $\mathcal{T}'$ est une autre topologie satisfaisant aux mêmes propriétés. On contemple le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "q"] \arrow[d, "q"'] & (E/\mathcal{R}, \mathcal{T}') \\
(E/\mathcal{R}, \mathcal{T}) \arrow[ur, dotted, "\mathrm{Id}"] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la deuxième propriété de la proposition nous vend une application « identité » Id continue, par définition de $\mathcal{T}$. Le diagramme analogue utilisant la définition de $\mathcal{T}'$ nous vend la continuité de Id, cette fois de $(E/\mathcal{R}, \mathcal{T}')$ dans $(E/\mathcal{R}, \mathcal{T})$. Ainsi l'application Id est un homéomorphisme, ce qui identifie les topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. $\square$

Remarque 2.4. L'espace topologique $(E/\mathcal{R}, \mathcal{T})$ est solution d'un « problème universel ». On en rencontrera d'autres dans ces notes (voir le théorème III-3.6, le chapitre VI et ses exercices).

Remarque 2.5. C'est simple et naturel. Remarquons toutefois que l'espace quotient peut être très mauvais : on pourrait avoir deux classes distinctes et disjointes mais arbitrairement proches l'une de l'autre, le quotient n'étant alors pas séparé. Penser par exemple au cas du quotient $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ de $\mathbf{R}$ par la relation d'équivalence $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Q}$. Dans l'espace topologique quotient, les seuls ouverts sont $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ et l'ensemble vide[1]... Soit en effet $U \subset \mathbf{R}/\mathbf{Q}$, un ouvert. Si $U \neq \varnothing$, soit $V = q^{-1}(U)$ et soit $x_0 \in V$. Pour tout x dans V et tout r dans $\mathbf{Q}$, $x + r \in V$ (V est saturé). Soit $y \in \mathbf{R}$, alors $y - x_0$ est, comme tous les réels, limite d'une suite r_n de rationnels. Donc $y \in V$, donc $V = \mathbf{R}$ et $U = \mathbf{R}/\mathbf{Q}$.

Sans aller jusqu'à des exemples aussi grossiers, on obtient facilement des espaces non séparés, ce qu'on souhaite éviter.

Proposition 2.6. *Si la relation $\mathcal{R}$ est ouverte (c'est-à-dire si le saturé d'un ouvert est un ouvert) et si son graphe est un sous-espace fermé de $E \times E$, alors le quotient $E/\mathcal{R}$ est un espace topologique séparé.*

[1] C'est un espace topologique « grossier », c'est-à-dire dans lequel les seuls ouverts sont l'espace lui-même et $\varnothing$.

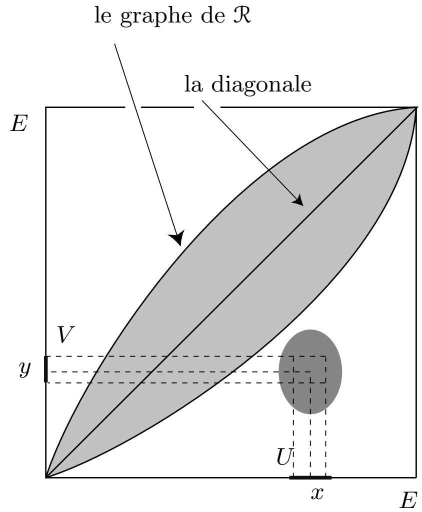


FIGURE 1

Démonstration. Soient u et v deux points distincts de $E/\mathcal{R}$, représentés par deux éléments x et y de E. Dire que $u \neq v$, c'est dire que (x, y) n'est pas dans le graphe de $\mathcal{R}$. Comme ce dernier est fermé, on peut trouver un voisinage de (x, y) dans $E \times E$ qui ne le rencontre pas. Dans ce voisinage, il y a un ouvert de la forme $U \times V$ où U est un voisinage de x et V un voisinage de y.

Comme $\mathcal{R}$ est ouverte, $q : E \to E/\mathcal{R}$ est une application ouverte. Donc, $q(U)$ et $q(V)$ sont des ouverts, voisinages respectivement de u et v. Enfin, $q(U) \cap q(V) = \varnothing$. Sinon, on peut trouver un ξ dans U et un η de V tel que $q(\xi) = q(\eta)$ donc $\xi \,\mathcal{R}\, \eta$ et (ξ, η) est dans l'intersection du graphe de $\mathcal{R}$ avec $U \times V$. $\square$

Proposition 2.7. *Si E est compact*[(2)] *et si le graphe de $\mathcal{R}$ est fermé, alors $E/\mathcal{R}$ est séparé.*

Démonstration. Montrons d'abord que le saturé $\widehat{A}$ d'un fermé A de E est fermé dans E :

$$\begin{aligned} \widehat{A} &= \{x \in E \mid \exists\, y \in A \text{ avec } x \,\mathcal{R}\, y\} \\ &= \mathrm{pr}_2\left((A \times E) \cap \mathrm{Graphe}(\mathcal{R})\right) \end{aligned}$$

est l'image d'un compact par une application continue, donc en particulier est bien un fermé.

Soient maintenant deux éléments u et v de $E/\mathcal{R}$. Alors $q^{-1}(u)$ et $q^{-1}(v)$ sont deux fermés, donc deux compacts de E. On peut donc les séparer par des ouverts $U \supset q^{-1}(u)$ et $V \supset q^{-1}(v)$ avec $U \cap V = \varnothing$. Les complémentaires $E - U$ et $E - V$ sont des fermés, leurs saturés le sont donc aussi, ainsi

$$U' = E - (\widehat{E - U}) \text{ et } V' = E - (\widehat{E - V})$$

sont des voisinages saturés de $q^{-1}(u)$ et $q^{-1}(v)$ contenus dans U, V et en particulier disjoints. Leurs images sont des ouverts séparant u et v. $\square$

Remarquons enfin que, sous les hypothèses de la proposition, $E/\mathcal{R}$ est compact (comme espace séparé image d'un compact par une application continue).

(2) Rappelons qu'un espace compact est un espace *séparé* vérifiant la propriété que l'on sait pour ses recouvrements par des ouverts.

Quotients par identification. Soient E un espace topologique, $F \subset E$ un sous-espace non vide et $f : F \to E$ une application continue. On suppose que, pour tout x dans F, l'ensemble

$$\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$$

a un ou deux éléments distincts. C'est le cas par exemple si $F \cap f(F) = \varnothing$ ou si $f : F \to E$ est constante.

On construit une relation d'équivalence sur E en « identifiant » x et $f(x)$:
– Si $x \notin F \cup f(F)$, la classe d'équivalence de x est $\{x\}$.
– Si $x \in F$, la classe d'équivalence de x est $\{f(x)\} \cup f^{-1}(f(x))$.
– Si $x \in f(F) - F \cap f(F)$, c'est $\{x\} \cup f^{-1}(x)$.
Le quotient $E/\mathcal{R}$ est noté E/f.

Exemples 2.8

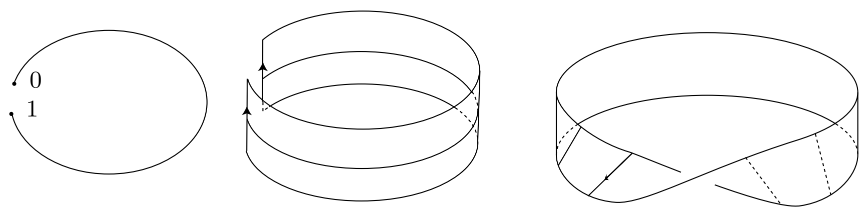


Figure 2. Un cercle, un cylindre et une bande de Möbius

(1) Soient $E = [0, 1]$, $F = \{0\}$ et f définie par $f(0) = 1$. Le quotient est homéomorphe au cercle S^1 par $u \mapsto e^{2i\pi u}$, obtenu, donc, en identifiant les extrémités de l'intervalle $[0, 1]$.
(2) De même, si $E = [0, 1] \times [-1, 1]$, $F = \{0\} \times [-1, 1]$ et f est l'application

$$\begin{aligned} f : F &\longrightarrow E \\ (0, t) &\longmapsto (1, t), \end{aligned}$$

le quotient est homéomorphe à un *cylindre* $S^1 \times [-1, 1]$.
(3) On garde le même E, le même F, mais on change d'application, utilisant

$$\begin{aligned} g : F &\longrightarrow E \\ (0, t) &\longmapsto (1, -t). \end{aligned}$$

Le quotient est une *bande de Möbius*.

Ces trois quotients sont représentés sur la figure 2.

Proposition 2.9. *Si E est un espace compact et F un fermé de E, alors E/f est séparé (et donc aussi compact).*

Démonstration. Montrons d'abord que le graphe de $\mathcal{R}$ est fermé. Celui-ci est en effet la réunion de quatre fermés
– la diagonale Δ de $E \times E$ qui est fermée parce que E est séparé(3),
– le graphe de f, image du compact F par l'application continue $x \mapsto (x, f(x))$,
– son symétrique $\{(f(x), x) \mid x \in F\}$, qui est fermé pour la même raison
– et, enfin,

$$\{(x, y) \in F \times F \mid f(x) = f(y)\} = (f \times f)^{-1}(\Delta),$$

fermé comme image inverse de la diagonale (fermée) par l'application continue $f \times f$.
Il n'y a plus qu'à appliquer la proposition 2.7. $\square$

(3) Un espace E est séparé si et seulement si la diagonale est fermée dans $E \times E$, une application directe de la définition de la topologie produit.

Un cas particulier intéressant d'identification est celui où l'on recolle deux espaces. Ici, $E = X \coprod Y$ est la réunion disjointe de deux espaces topologiques, F est une partie non vide de Y et f une application de F dans X. Le quotient $(X \coprod Y)/f$ est aussi noté $X \cup_f Y$.

***Exemple 2.10* (Le huit).** Pour cet exemple, X et Y sont des cercles, $F = \{b\}$ est constitué d'un seul point de Y, f est (forcément !) constante, soit $a \in X$ l'image de b. L'espace topologique obtenu est un « huit ». Il est compact et connexe par arcs (c'est un exemple d'application des deux propositions qui suivent).

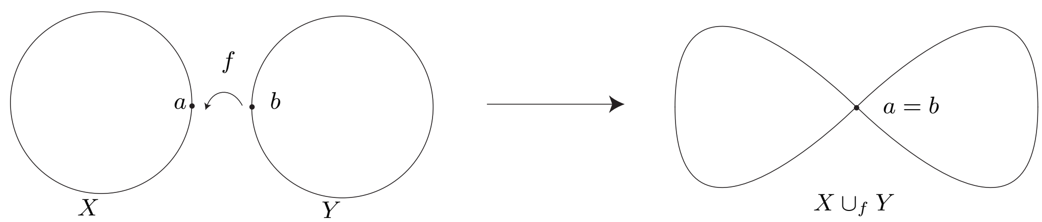


FIGURE 3. Le huit

***Proposition 2.11*.** *Si X et Y sont connexes (resp. par arcs), alors $X \cup_f Y$ est connexe (par arcs).*

Démonstration de la connexité par arcs. Il suffit de savoir relier un point x de $q(X)$ et un point y de $q(Y)$. On relie y à un point de F (opportunément supposé non vide), puis l'image de ce point par f à x. $\square$

Une conséquence directe de la proposition 2.9 est le résultat suivant.

***Proposition 2.12*.** *Si X et Y sont compacts et si F est fermé, alors $X \cup_f Y$ est compact.* $\square$

***Corollaire 2.13*.** *Si X et Y sont compacts et si F est fermé, alors l'application quotient $q : X \coprod Y \to X \cup_f Y$ est un homéomorphisme de X sur $q(X)$.*

Démonstration. L'application q est une bijection continue de X sur $q(X)$ et X est compact[(4)]. $\square$

3. Groupes topologiques opérant

Un *groupe topologique* est un ensemble G muni d'une structure de groupe et d'une structure d'espace topologique compatibles entre elles, au sens où les deux applications

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g,h) &\longmapsto gh \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

définissant la structure de groupe sont continues.

Un espace topologique E est muni d'une *opération continue* d'un groupe topologique G par la donnée d'une application continue

$$\begin{aligned} G \times E &\longrightarrow E \\ (g,x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

qui est une opération de groupe (c'est-à-dire telle que $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ et $1 \cdot x = x$).

Remarquons qu'alors, tout élément g de G définit une bijection continue d'inverse continu, donc un homéomorphisme de E dans E.

(4) Il vaut mieux avoir remarqué qu'une bijection continue définie sur un espace topologique compact est un homéomorphisme.

Remarque 3.1. On a défini ainsi une opération « à gauche », au sens où il faut écrire les éléments du groupe à gauche de ceux de l'espace (comme ceci : $g \cdot x$) pour avoir la jolie relation $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ (sans changer l'ordre). Il existe aussi, et on en verra un exemple naturel dans ces notes, des opérations où l'ordre change, c'est-à-dire telles que $g \cdot (h \cdot x) = (hg) \cdot x$. Il est alors plus clair et plus élégant de mettre les éléments du groupe à droite (comme ceci : $x \cdot g$), la relation s'écrivant maintenant $(x \cdot h) \cdot g = x \cdot (hg)$, ce qui est plus naturel. Les opérations vérifiant cette propriété sont des opérations « à droite ». Il n'y a pas de différence fondamentale entre opérations à droite et à gauche. On passe d'ailleurs facilement des unes aux autres (voir l'exercice II.21).

On note $G \cdot x$ l'orbite de l'élément x de E (c'est une partie de E) et G_x son stabilisateur (c'est un sous-groupe de G). L'ensemble des orbites est noté E/G.

Remarque 3.2. La relation d'équivalence « être dans la même orbite que » est ouverte. En effet, si U est un ouvert, $g \cdot U$ est aussi un ouvert puisque g définit un homéomorphisme, donc le saturé de U est la réunion $\cup_{g \in G} g \cdot U$, une réunion d'ouverts, donc un ouvert.

En particulier, l'application quotient $E \to E/G$ est une application ouverte[(5)].

Opérations propres. On dit que le groupe topologique G opère *proprement* sur l'espace topologique E si, pour tout compact $K \subset E$, l'ensemble

$$\{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \varnothing\}$$

est une partie relativement compacte de G.

Si G est compact, c'est automatique. Si G est discret, cette propriété est satisfaite si et seulement si, pour tout compact K de E, l'ensemble

$$\{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \varnothing\}$$

est fini.

Exemple 3.3. Le groupe $\mathbf{Z}^2$ opère par translations (de vecteurs à coordonnées entières) sur le plan affine $\mathbf{R}^2$. Cette opération est propre. En effet, toute partie compacte K de $\mathbf{R}^2$, étant bornée, est contenue dans un rectangle $[m_1, m_2] \times [n_1, n_2]$ (où les nombres m_i, n_i sont entiers). Voir la figure 4. Alors une translation

$$t \notin [0, m_2 - m_1] \times [0, n_2 - n_1]$$

disjoint K de lui-même.

Le même argument s'applique à l'opération de $\mathbf{Z}^n$ par translations entières sur $\mathbf{R}^n$.

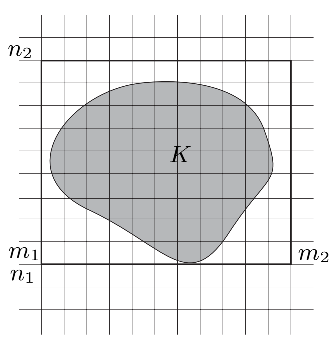


FIGURE 4

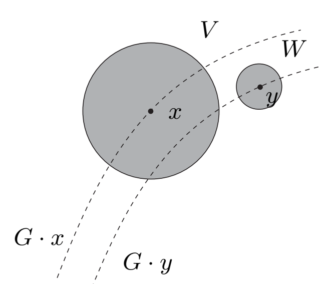


FIGURE 5

[(5)]Ce n'est pas toujours le cas des applications quotient, c'est une propriété des quotients par les actions de groupes.

Proposition 3.4. *Soit E un espace topologique localement compact*[6] *et soit G un groupe discret opérant proprement sur E. Alors toutes les orbites sont fermées et discrètes dans E et l'espace des orbites est séparé.*

Démonstration. Montrons d'abord que les orbites sont fermées et discrètes. Soit donc $G \cdot x$ l'orbite d'un point x. Par hypothèse de propreté, pour tout compact K de E, $(G \cdot x) \cap K$ est fini, donc $G \cdot x$ est fermé et discret. Pour montrer que E/G est séparé, comme on sait que $\mathcal{R}$ est ouverte, il suffit de vérifier que son graphe est fermé. Soit donc (x, y) un point du complémentaire du graphe dans $E \times E$, en d'autres termes, soient x et y deux points de E dans deux orbites différentes. Soient V un voisinage compact de x et W un voisinage compact de y tel que $G \cdot x \cap W = \varnothing$. Voir la figure 5. L'ensemble

$$A = \{g \in G \mid g \cdot (V \cup W) \cap (V \cup W) \neq \varnothing\}$$

est fini par hypothèse de propreté, donc $\bigcup_{g \in A} g \cdot W$ est une réunion finie de fermés, donc un fermé. Enfin,

$$U = V - V \cap \left(\bigcup_{g \in A} g \cdot W \right)$$

est un voisinage de x tel que $U \times W$ ne rencontre pas le graphe de $\mathcal{R}$. □

Opérations libres. L'opération de G sur E est dite *libre* si les stabilisateurs de tous les points de E sont triviaux.

Proposition 3.5. *Soit G un groupe discret opérant proprement et librement sur un espace localement compact E. Alors tout point de E possède un voisinage ouvert V tel que $(g \cdot V) \cap V = \varnothing$ pour tout $g \neq 1$ dans G.*

Démonstration. Soit x un point de E. Son orbite est discrète comme on l'a vu (proposition 3.4 ci-dessus) et E est localement compact. On peut donc trouver un voisinage compact K de x tel que $K \cap (G \cdot x) = \{x\}$. L'ensemble

$$A = \{g \in G \mid (g \cdot K) \cap K \neq \varnothing\}$$

est fini, donc

$$K - K \cap \left(\bigcup_{g \in A - \{e\}} g \cdot K \right)$$

est un voisinage W de x et on a $g \cdot W \cap W = \varnothing$ pour tout $g \neq e$ par construction. □

Opérations proprement discontinues. La propriété mise en évidence dans la proposition 3.5 est le fait qu'une opération propre et libre d'un groupe discret sur un espace localement compact est une opération *proprement discontinue*. On dit qu'un groupe discret G opère *proprement discontinûment* sur l'espace topologique E si tout point de E possède un voisinage ouvert V tel que

$$(g \cdot V) \cap V = \varnothing \quad \forall g \neq 1.$$

Exemple 3.6. Soit G un groupe fini opérant librement sur un espace séparé E. Alors l'opération de G est proprement discontinue. Soit en effet x un point de E. Les points $x, g_1 \cdot x, \ldots, g_{n-1} \cdot x$ de l'orbite de x (n est l'ordre de G) peuvent être séparés par des ouverts $V_0, \ldots, V_{n-1}$. L'intersection finie

$$V = V_0 \cap (g_1^{-1} \cdot V_1) \cap \cdots \cap (g_{n-1}^{-1} \cdot V_{n-1})$$

est un ouvert, un voisinage de x, et on a

$$(g_i \cdot V) \cap V \subset V_i \cap V_0 = \varnothing \quad \forall i = 1, \ldots, n-1.$$

[6] Rappelons qu'un espace est *localement compact* s'il est *séparé* et si chacun de ses points possède un système fondamental de voisinages compacts.

Remarque 3.7. Dans le cas d'une opération proprement discontinue, l'application quotient $E \to E/G$ est un revêtement... une habile transition vers le chapitre suivant.

Exercices

Généralités

Dans ces exercices, les notations sont standard, S^n désigne la sphère unité de l'espace euclidien $\mathbf{R}^{n+1}$ et D^n la boule unité fermée de $\mathbf{R}^n$.

Exercice II.1. Donner un exemple d'espace connexe non localement connexe.

Exercice * ***II.2***. Les composantes connexes d'un espace topologiques sont fermées. Elles sont ouvertes si l'espace est localement connexe.

Exercice * ***II.3***. Un espace connexe localement connexe par arcs est connexe par arcs.

Exercice * ***II.4***. Le complémentaire d'un point dans $\mathbf{R}$ (resp. dans $\mathbf{C}$) est-il connexe ?

Exercice * ***II.5***. Montrer que $\mathbf{R}^n - \{0\}$ est homéomorphe à $S^{n-1} \times \mathbf{R}$.

Exercice * ***II.6***. Montrer que $D^p \times D^q$ est homéomorphe à D^{p+q}.

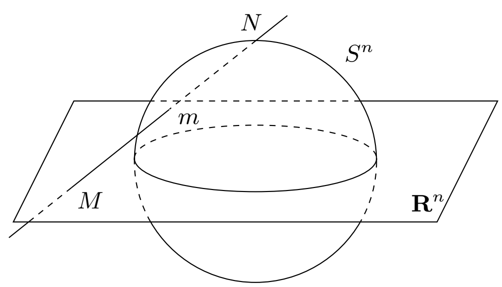


FIGURE 6. Projection stéréographique

Exercice * ***II.7* (Projection stéréographique)**. Montrer que le complémentaire d'un point dans S^n $(n \geq 1)$ est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$ (figure 6).

Exercice * ***II.8* (Compactifié d'Alexandrov)**. Soit $\widehat{\mathbf{R}}^n$ l'ensemble obtenu en ajoutant un point, noté ∞, à $\mathbf{R}^n$. Montrer que $\widehat{\mathbf{R}}^n$ possède une (unique) topologie telle que

- la topologie induite sur le sous-espace $\mathbf{R}^n \subset \widehat{\mathbf{R}}^n$ est la topologie usuelle
- les voisinages ouverts de ∞ sont les $(\mathbf{R}^n - K) \cup \{\infty\}$ pour K compact de $\mathbf{R}^n$.

Montrer que $\widehat{\mathbf{R}}^n$ est un espace compact et que l'homéomorphisme obtenu dans l'exercice II.7 se prolonge en un homéomorphisme $S^n \to \widehat{\mathbf{R}}^n$. Montrer que tout point de $\widehat{\mathbf{R}}^n$ a un voisinage homéomorphe à une boule ouverte de dimension n.

Exercice * ***II.9* (Théorème de l'application ouverte)**. Montrer que si f est une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbf{C}$ alors f définit une application ouverte $U \to \mathbf{C}$. En particulier, $f(U)$ est un ouvert de $\mathbf{C}$. Pour cela, montrer que pour tout $z_0 \in U$ il existe un disque ouvert de centre z_0 sur lequel on a

$$f(z) = f(z_0) + \varphi(z)^m$$

où m est un entier et φ une fonction holomorphe telle que $\varphi'(z_0) \neq 0$.

On suppose de plus que f est injective, donc induit une bijection $U \to f(U)$. Montrer qu'alors sa dérivée f' ne s'annule en aucun point de U et que la bijection réciproque de f est holomorphe.

***Exercice II.10* (Espaces d'applications)**. Si X et Y sont des espaces topologiques séparés, on appelle $\mathcal{C}(X,Y)$ l'ensemble des applications continues de X dans Y, on le munit de la topologie (dite « compact-ouvert ») engendrée par les

$$W(K,U) = \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f(K) \subset U\}$$

où K est un compact de X et U un ouvert de Y. Démontrer les assertions suivantes :

– Si Y est un espace métrique, cette topologie coïncide avec la topologie de la convergence uniforme sur tous les compacts.
– Si X est localement compact, l'application

$$\begin{aligned} X \times \mathcal{C}(X,Y) &\longrightarrow Y \\ (x,f) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est continue.

Soit Z un espace séparé. Pour $f \in \mathcal{C}(X \times Y, Z)$ et $y \in Y$, on note f_y l'application $x \mapsto f(x,y)$. Démontrer que

– Pour tout $f \in \mathcal{C}(X \times Y, Z)$, l'application $\Phi_f : Y \to \mathcal{C}(X,Z)$ définie par $\Phi_f(y) = f_y$ est continue.
– L'application $\Phi : \mathcal{C}(X \times Y, Z) \to \mathcal{C}(Y, \mathcal{C}(X,Z))$ définie par $\Phi(f) = \Phi_f$ est continue.
– Si X est localement compact, Φ est une bijection.
– L'application Φ est ouverte.
– Si X est localement compact, Φ est un homéomorphisme

$$\mathcal{C}(X \times Y, Z) \longrightarrow \mathcal{C}(Y, \mathcal{C}(X,Z)).$$

Sur les quotients

Exercice * ***II.11***. L'espace quotient $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ (*tore* de dimension n) est homéomorphe au produit de n copies du cercle S^1.

Exercice * ***II.12***. Montrer que $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, muni de la topologie quotient, est un espace topologique compact. Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \to S^1$ définie par l'exponentielle est un isomorphisme de groupes topologiques.

Exercice * ***II.13* (Espaces projectifs réels)**. On considère la relation d'équivalence engendrée par $x \sim -x$ sur la sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$. Montrer que le quotient est un espace topologique compact et connexe qu'on peut identifier à l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbf{R}^{n+1}$. On l'appelle espace projectif réel de dimension n et on le note $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ est homéomorphe à un cercle S^1.

Exercice * ***II.14***. Soient $F = S^{n-1} \times \{0\} \subset S^{n-1} \times [0,1] = E$ et $f : F \to S^{n-1} \times \{0\}$ l'application constante $f(x,0) = (x_0,0)$. Montrer que l'espace quotient E/f est homéomorphe à D^n (voir plus généralement l'exercice II.19).

Exercice * ***II.15***. Le cercle est homéomorphe à l'espace obtenu en identifiant les extrémités du segment $[0,1]$. Plus généralement, la sphère S^n $(n \geq 1)$ est homéomorphe à l'espace obtenu en identifiant le bord S^{n-1} de la boule D^n en un point(7).

Exercice * ***II.16***. La sphère S^n $(n \geq 1)$ est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant deux boules D^n au moyen de l'application identique $\mathrm{Id} : S^{n-1} \to S^{n-1}$. En déduire que S^n est connexe par arcs.

Exercice * ***II.17* (Un quotient du disque — examen, 2003)**. On considère le disque unité

$$D = \left\{u \in \mathbf{R}^2 \mid \|u\|^2 \leq 1\right\}$$

et la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ dont les classes sont

– les singletons $\{u\}$ pour $\|u\| < 1$

(7) On peut utiliser l'exercice II.8.

– les doubletons $\{u, -u\}$ pour $\|u\| = 1$.
Montrer que l'espace topologique quotient $D/\mathcal{R}$ est compact. À quel espace connu (sphère, tore, espace projectif, bande de Möbius, boule...) est-il homéomorphe (on demande une démonstration) ?

Exercice * ***II.18***. On recolle D^2 à S^1 par l'application

$$\begin{aligned} D^2 \supset S^1 &\xrightarrow{f} S^1 \\ z &\longmapsto z^2. \end{aligned}$$

Identifier l'espace obtenu.

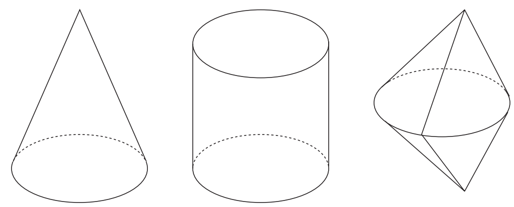


Figure 7. Cône, cylindre, suspension

Exercice * ***II.19* (Cônes et suspensions)**. Soit X un espace topologique. On appelle *cône* sur X l'espace CX quotient de $X \times [0,1]$ par la relation d'équivalence qui identifie tous les points de $X \times \{0\}$ en un point. Montrer que CX contient un sous-espace homéomorphe à X (la « base » du cône). Montrer que le cône sur S^{n-1} est homéomorphe à D^n (exercice II.14).

On appelle *suspension* de X l'espace topologique SX obtenu à partir de $X \times [0,1]$ en identifiant les points de $X \times \{0\}$ en un point et ceux de $X \times \{1\}$ en un autre point. Montrer que SX contient un sous-espace homéomorphe à X. Montrer que la suspension de la sphère S^{n-1} est homéomorphe à S^n.

Exercice II.20. La sphère S^3 est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant deux « tores pleins » $D^2 \times S^1$ au moyen de l'application identique

$$D^2 \times S^1 \supset S^1 \times S^1 \xrightarrow{\mathrm{Id}} S^1 \times S^1 \subset S^1 \times D^2.$$

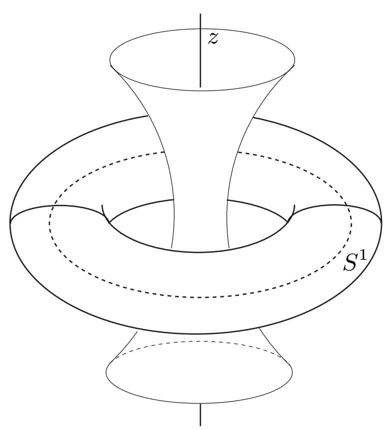


Figure 8. L'espace $\mathbf{R}^3$ comme réunion de deux tores pleins

La figure 8 représente $\mathbf{R}^3$ (c'est-à-dire S^3 privée d'un point, exercice II.8) comme réunion d'un tore plein et de son complémentaire, qui est aussi un tore plein (privé d'un point).

Groupes topologiques et opérations

Dans ces exercices, $\mathrm{O}(n)$ désigne le *groupe orthogonal* des matrices $n\times n$ réelles telles que ${}^tAA=\mathrm{Id}$, $\mathrm{O}^+(n)$ le sous-groupe des matrices dans $\mathrm{O}(n)$ dont le déterminant vaut 1, $\mathrm{U}(n)$ le *groupe unitaire* des matrices $n\times n$ complexes telles que ${}^t\overline{A}A=\mathrm{Id}$, $\mathrm{SU}(n)$ le *groupe spécial unitaire* des matrices unitaires de déterminant 1. Pour tout ce qui concerne les groupes classiques utilisés ici, on consultera avec profit le livre [**MT86**].

Exercice * ***II.21***. Soit G un groupe opérant à droite sur un ensemble E. On définit une application

$$\begin{aligned} G\times E &\longrightarrow E\\ (g,x) &\longmapsto x\cdot g^{-1}. \end{aligned}$$

Montrer que c'est une opération à gauche de G sur E.

Exercice * ***II.22***. Soit H un sous-groupe discret d'un groupe topologique connexe G. On suppose que H est distingué dans G. Montrer que H est contenu dans le centre de G.

Exercice * ***II.23***. Soit G un groupe topologique. Montrer que toutes ses composantes connexes par arcs sont homéomorphes. Montrer que la composante G° de l'élément neutre est un sous-groupe distingué de G. À quoi le quotient G/G° est-il homéomorphe ?

Exercice * ***II.24***. Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G. Montrer que G/H est séparé si et seulement si H est fermé.

Exercice * ***II.25***. Un groupe compact G opère sur un espace compact E. Montrer que le quotient E/G est séparé (et donc compact).

Exercice * ***II.26***. La lettre $\mathbf{K}$ désigne l'un des deux corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Montrer que le groupe linéaire $\mathrm{GL}(n,\mathbf{K})$ est un ouvert de l'espace vectoriel des matrices $n\times n$ et un groupe topologique.

Exercice * ***II.27***. Montrer que $\mathrm{O}^+(2)$ et $\mathrm{U}(1)$ sont isomorphes, comme groupes topologiques, au cercle S^1.

Exercice * ***II.28***. Montrer que $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{O}^+(n)$ sont des groupes compacts.

Exercice * ***II.29***. Montrer que $\mathrm{U}(n)$ est homéomorphe à $S^1\times\mathrm{SU}(n)$, mais que ces deux groupes ne sont pas isomorphes[(8)].

Exercice * ***II.30***. Montrer que $\mathrm{SU}(n)$ est connexe par arcs. En déduire que $\mathrm{U}(n)$ est connexe par arcs.

Exercice * ***II.31***. Montrer que le groupe $\mathrm{O}^+(n)$ est connexe par arcs. Combien $\mathrm{O}(n)$ a-t-il de composantes connexes ?

Exercice * ***II.32***. Montrer que $\mathrm{GL}(n;\mathbf{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{O}(n)\times\mathbf{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice * ***II.33***. Montrer que $\mathrm{GL}^+(n;\mathbf{R})$ est connexe par arcs. Combien $\mathrm{GL}(n;\mathbf{R})$ a-t-il de composantes connexes ?

Exercice * ***II.34*** **(Espaces projectifs complexes)**. On considère le quotient de $\mathbf{C}^{n+1}-\{0\}$ par la relation d'équivalence qui identifie deux vecteurs non nuls colinéaires. Montrer que le quotient est un espace topologique compact et connexe qu'on peut identifier à l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbf{C}^{n+1}$. On l'appelle espace projectif complexe de dimension n et on le note $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Montrer que $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est homéomorphe à une sphère S^2.

(8) Malgré ce qu'affirme [**God71**, p. 36].

***Exercice II.35* (Variétés de Stiefel)**. Étant donnés deux entiers N et k (avec $k \leq N$), on appelle « variété de Stiefel » des k-repères orthonormés de $\mathbf{R}^N$ le sous-espace de $(\mathbf{R}^N)^k$ défini par

$$V_k(\mathbf{R}^N) = \{(v_1, \ldots, v_k) \mid v_i \cdot v_j = \delta_{i,j}\}.$$

Montrer que $V_k(\mathbf{R}^N)$ est un espace topologique compact et qu'on a des homéomorphismes $V_1(\mathbf{R}^n) \cong S^{n-1}$, $V_n(\mathbf{R}^n) \cong \mathrm{O}(n)$, $V_{n-1}(\mathbf{R}^n) \cong \mathrm{O}^+(n)$.

***Exercice II.36* (Espaces homogènes)**. Soient X un espace localement compact et G un groupe topologique compact opérant continûment et transitivement sur X. Soit $x \in X$. On appelle G_x le stabilisateur de x. Montrer que X est homéomorphe à G/G_x. On dit que X est un espace homogène.

En faisant opérer le groupe orthogonal sur $\mathbf{R}^n$, montrer que la sphère S^{n-1} est un espace homogène, quotient de $\mathrm{O}^+(n)$ et plus généralement que la variété de Stiefel $V_k(\mathbf{R}^n)$ (exercice II.35) est un espace homogène de $\mathrm{O}(n)$. De même, en faisant opérer $\mathrm{SU}(n)$ sur $\mathbf{C}^n$, montrer que la sphère S^{2n-1} est un espace homogène, quotient de $\mathrm{SU}(n)$.

***Exercice II.37* (Utilisation des quaternions)**. Soit $\mathbf{H}$ la partie de $M_2(\mathbf{C})$ formée des matrices de la forme $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, avec a, $b \in \mathbf{C}$. On note

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $q = \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix}$, on pose $\overline{q} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ -b & a \end{pmatrix}$ et $|q| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$. Montrer que

- $\mathbf{H}$ est un espace vectoriel réel de base $(1, i, j, k)$ (mais pas un sous-espace vectoriel complexe de $M_2(\mathbf{C})$) et une algèbre sur $\mathbf{R}$.
- L'ensemble $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ est un sous-groupe multiplicatif.
- Pour tout q dans $\mathbf{H}$, on a $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$.
- $\mathbf{H}$ est un corps (non commutatif).
- $|\cdot|$ est une norme et $\mathbf{H}$ un corps topologique (pour cette norme).
- La sphère unité de $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathbf{H}^\star$, qui s'identifie à $\mathrm{SU}(2)$... et à la sphère[9] S^3.
- $\mathbf{R}$ s'identifie à un sous-corps de $\mathbf{H}$ qui est le centre de $\mathbf{H}$.

On appelle « quaternions » les éléments de $\mathbf{H}$ et « quaternions purs » ceux du sous-espace de dimension 3 engendré par i, j et k.

Application à la topologie de $\mathrm{O}^+(3)$. Soit $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{H}$ l'isomorphisme de $\mathbf{R}^3$ avec l'espace des quaternions purs défini par $Q(x, y, z) = xi + yj + zk$.

Soit $q \in \mathbf{H}^\star$ et soit u un quaternion pur. Montrer que quq^{-1} est un quaternion pur. On définit donc une application $\varphi_q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ en posant

$$\varphi_q(y) = Q^{-1}(qQ(y)q^{-1}).$$

Montrer que

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} - \{0\}, \quad \varphi_{\lambda q} = \varphi_q$$

et que $\varphi_q \in \mathrm{O}^+(3)$ (il n'est peut-être pas inutile de signaler qu'il est possible de traiter cette question sans calculs...). En déduire qu'il existe deux applications

$$\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{O}^+(3) \text{ et } \mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathrm{O}^+(3)$$

[9] et donc S^3 possède une structure de groupe, ce qui est assez exceptionnel pour une sphère, contrairement à ce que les cas de S^0 et S^1 pourraient laisser croire.

qui sont un homomorphisme de groupes et un revêtement double[10] pour la première, un homéomorphisme pour la deuxième[11].

Application à $\mathrm{O}^+(4)$. Si S^3 désigne la sphère unité de $\mathbf{H}$ et S^2 celle de $\mathbf{R}^3$, montrer que

$$\begin{aligned} f : S^3 \times S^2 &\longrightarrow V_2(\mathbf{R}^4) \\ (x, y) &\longmapsto (x, \overline{Q(y)x}) \end{aligned}$$

(le membre de droite est une variété de Stiefel, voir l'exercice II.35) est un homéomorphisme et donc que $V_2(\mathbf{R}^4)$ est homéomorphe à $S^3 \times S^2$.

De même, exhiber un homéomorphisme $S^3 \times V_2(\mathbf{R}^3) \to V_3(\mathbf{R}^4)$. En déduire que $\mathrm{O}^+(4)$ est homéomorphe à $S^3 \times \mathrm{O}^+(3)$ (et à $S^3 \times \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$).

***Exercice II.38* (Le groupe modulaire).** On considère le groupe $\mathrm{SL}(2; \mathbf{Z})$, sous-groupe de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{C})$ formé des matrices à déterminant 1 et coefficients entiers. Quel est son centre ? Le quotient de $\mathrm{SL}(2; \mathbf{Z})$ par son centre est le *groupe modulaire*[12] $\mathrm{PSL}(2; \mathbf{Z})$. Montrer que ce groupe opère sur le demi-plan

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

On considère les deux éléments S et T de $\mathrm{PSL}(2; \mathbf{Z})$ définies par

$$S(z) = -\frac{1}{z} \text{ et } T(z) = z + 1.$$

Vérifier que $S^2 = \mathrm{Id}$ et que $(ST)^3 = \mathrm{Id}$. On considère la partie D de $\mathcal{H}$ définie par

$$D = \left\{ z \in \mathcal{H} \mid |z| \geq 1 \text{ et } -\frac{1}{2} \leq \mathrm{Ré}(z) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Dessiner D et montrer que

- Pour tout point z dans $\mathcal{H}$, il existe un élément g de $\mathrm{PSL}(2; \mathbf{Z})$ tel que $g \cdot z \in D$.
- Si z, z' sont deux points distincts de D, et si $z' = g \cdot z$ pour un g dans $\mathrm{PSL}(2; \mathbf{Z})$, on a

$$\mathrm{Ré}(z) = \pm\frac{1}{2} \text{ et } z = z' \mp 1 \text{ ou } |z| = 1 \text{ et } z' = -\frac{1}{z}.$$

- Le stabilisateur d'un point z de D est
  - trivial sauf si
  - $z = i$, auquel cas le stabilisateur est $\mathbf{Z}/2$, engendré par S ou
  - $z = \pm j$, auquel cas le stabilisateur est $\mathbf{Z}/3$, engendré par ST ou TS.

En déduire que le groupe $\mathrm{PSL}(2; \mathbf{Z})$ est engendré par S et T.

---

[10] On anticipe ici légèrement sur le chapitre suivant.

[11] Voir au besoin l'exercice II.13 pour la définition et les premières propriétés de l'espace projectif $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$.

[12] Pour des utilisations élémentaires de ce groupe en arithmétique, voir [**Ser70**].

CHAPITRE III

REVÊTEMENTS

Quelques précautions

Dans ce chapitre et les suivants, même si je ne le dis pas toujours explicitement (et sauf si je dis explicitement le contraire !), les espaces considérés sont *séparés* et localement connexes par arcs (en particulier, les notions de connexité et de connexité par arcs coïncident). Il suffira d'ailleurs de le supposer pour seulement la moitié des espaces considérés, comme on le vérifiera dans l'exercice III.1.

1. Définition des revêtements

Soit B un espace topologique. Un *revêtement* de B est la donnée d'un espace topologique E et d'une application continue $p : E \to B$ ayant la propriété de *trivialisation locale* suivante. Pour tout point b de B, il existe un voisinage V de b dans B, un espace discret non vide F et un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(V) \to V \times F$ tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & V \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

commute. Si on pense à V comme à un disque, $p^{-1}(V)$ est une « pile d'assiettes[1] ». Voir la figure 1.

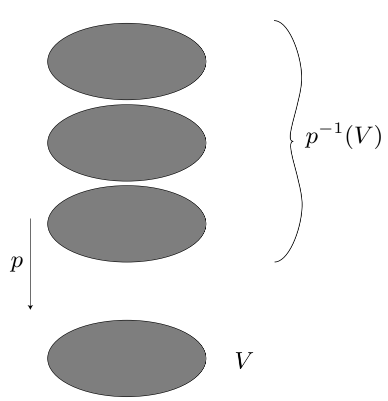


Figure 1

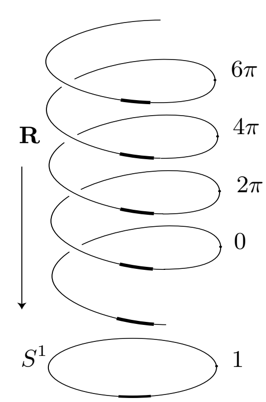


Figure 2

[1] Cette image classique et éclairante appartient à une tradition orale qui vient sans doute des cours d'Henri Cartan.

On appelle B la *base*, E l'*espace total*, F la[2] *fibre* du revêtement et Φ une *trivialisation locale* du revêtement *au dessus de* V. Cette terminologie incite à considérer un revêtement comme une flèche « verticale », ce que confirment les figures de ce chapitre.

Exemple 1.1. Le *revêtement trivial* est la projection $B \times F \to B$, où F est un espace discret. La propriété de trivialité locale est ici globale.

Exemple 1.2. L'application $t \mapsto \exp(2i\pi t)$ de $\mathbf{R}$ dans S^1 est un revêtement (figure 2).

Exemple 1.3. Plus généralement, l'exponentielle complexe

$$\exp : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} - \{0\}$$

(figure 3) est un revêtement. C'est bien une application continue ; montrons qu'elle vérifie la propriété de trivialité locale. Soit b un point de $\mathbf{C} - \{0\}$ et soit V un disque de centre b contenu dans $\mathbf{C} - \{0\}$. Sur un tel disque, il existe une détermination continue du logarithme, c'est-à-dire une fonction continue $g : V \to \mathbf{C}$ avec

$$\exp g(z) = z$$

pour tout z dans V. Toutes les autres déterminations du logarithme sur V diffèrent de g par un multiple entier de $2i\pi$. Donc un élément t de $\exp^{-1}(V)$ diffère de $g(\exp t)$ par un multiple entier de $2i\pi$. On peut donc définir $\Phi : \exp^{-1}(V) \to V \times \mathbf{Z}$ par

$$\Phi(t) = \left(e^t, \frac{g(e^t) - t}{2i\pi}\right).$$

C'est une application continue, elle fait commuter le diagramme et son inverse est

$$\begin{aligned} V \times \mathbf{Z} &\longrightarrow \exp^{-1}(V) \\ (z, k) &\longmapsto g(z) - 2i\pi k, \end{aligned}$$

une application continue, elle aussi. Donc Φ est bien l'homéomorphisme cherché.

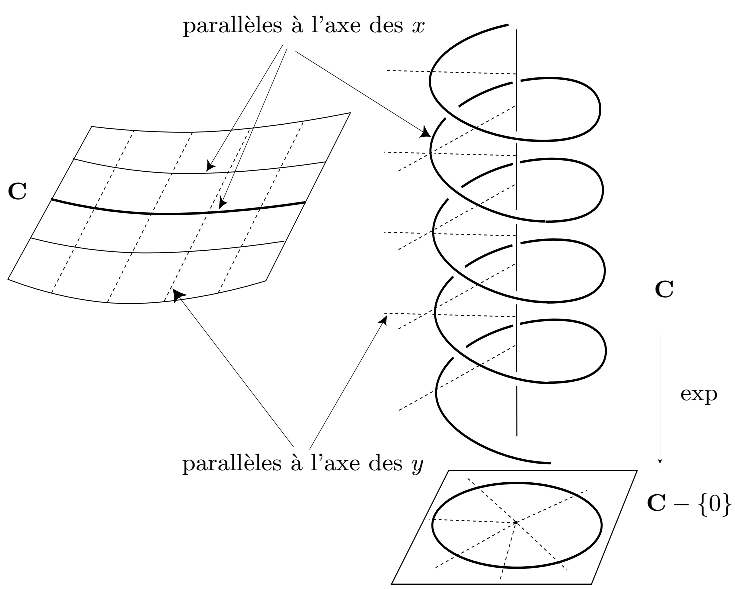


FIGURE 3. L'exponentielle complexe

La figure 3 représente, encore une fois, l'exponentielle complexe. L'espace de départ, $\mathbf{C}$, y est représenté deux fois. À gauche, il apparaît comme d'habitude, avec ses droites parallèles aux axes

[2] L'article défini sera justifié plus bas (propriété (5) p. 36 et corollaire 5.9).

réel et imaginaire. On le « vrille » pour pouvoir le représenter « au-dessus » de $\mathbf{C} - \{0\}$, de façon que l'exponentielle se représente, elle, comme la projection (penser à un escalier en colimaçon). Les parallèles à l'axe des x se retrouvent au-dessus des cercles centrés en 0, comme des hélices, donc. Au-dessus du cercle unité, on retrouve donc la figure 2.

Remarque 1.4. Le revêtement exponentiel n'est pas globalement trivial, puisque $\mathbf{C}$ est connexe.

Sections locales. Soit $p : E \to B$ une application continue. Une *section* de p au-dessus d'une partie V de B est une application continue

$$s : V \longrightarrow E$$

qui est un inverse partiel de p au sens où

$$p(s(x)) = x \text{ pour tout } x \text{ dans } V.$$

Par exemple une détermination du logarithme sur un disque $D \subset \mathbf{C} - \{0\}$ est une section du revêtement exponentiel au dessus de D. La figure 3 du chapitre I représente donc une (deux) section(s) du revêtement exponentiel. On aura compris que c'est une partie de la figure 3 ici.

Plus généralement, si V est un ouvert trivialisant le revêtement $p : E \to B$, c'est-à-dire si on a un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(V) \to V \times F$ avec $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi = p$, alors, pour tout f dans F, la formule

$$s_f(x) = \Phi^{-1}(x, f)$$

définit une section de p au dessus de V. Les images $s_f(V)$ sont des ouverts par définition de la topologie discrète et ils forment une partition de $p^{-1}(V)$. Cette propriété admet une réciproque et le tout est énoncé dans la proposition suivante.

Proposition 1.5. *Une application continue $p : E \to B$ est un revêtement si et seulement si, pour tout point b de B, il existe un voisinage ouvert V de b et une famille de sections $(s_f)_{f \in F}$ (pour un ensemble F non vide) de p au dessus de V telles que les $s_f(V)$ soient des ouverts disjoints de E formant une partition de $p^{-1}(V)$.*

Démonstration. Supposons donc la condition satisfaite et munissons l'ensemble F de la topologie discrète. Définissons $\Phi : p^{-1}(V) \to V \times F$ par

$$\Phi(x) = (p(x), f) \text{ si } x \in s_f(V).$$

Il est clair que Φ est un homéomorphisme (son inverse est $\Phi^{-1}(x, f) = s_f(x)$) et qu'il fait commuter le diagramme voulu. □

Les revêtements ont donc toujours des sections locales. Une section *globale* serait une section définie sur B tout entier. Si B est connexe, l'image d'une telle section est une composante connexe de E. Si de plus E est connexe, s est un homéomorphisme de B sur E, inverse de p. Le revêtement p est alors le revêtement trivial à un seul feuillet. Un revêtement n'a, en général, pas de section globale.

On a quand même un très utile résultat d'unicité (qu'on applique en général au dessus d'un ouvert).

Proposition 1.6. *Deux sections d'un revêtement de base B connexe qui coïncident en un point sont égales.*

Démonstration. Soit $s : B \to E$ une section du revêtement $p : E \to B$. C'est une application continue, elle est injective (car $p \circ s = \mathrm{Id}$), elle est ouverte (p est un homéomorphisme local et s un inverse, donc un homéomorphisme sur son image).

Si s et s' sont deux sections qui coïncident en un point, elles coïncident sur un ouvert. Ensuite, l'ensemble des points où elles coïncident est ouvert et fermé dans B et ce dernier est connexe. □

Premières propriétés des revêtements.

(1) La projection d'un revêtement est une application surjective : en effet, $p^{-1}(b)$ est en bijection avec l'espace non vide $\{b\} \times F$.
(2) Si E est compact (resp. connexe, connexe par arcs), alors B est compact (resp. connexe, connexe par arcs).
(3) Si B est séparé, alors E est séparé.
(4) Si $A \subset B$ est un sous-espace, alors

$$p\,|_{p^{-1}(A)} \colon p^{-1}(A) \longrightarrow A$$

est un revêtement.
(5) Si B est connexe et si p a une fibre finie, toutes les fibres de p ont le même cardinal (un exercice facile, voir plus généralement le corollaire 5.9). Ce cardinal est appelé le *nombre de feuillets* du revêtement. Attention, je n'ai pas défini un *feuillet !*

Démonstration. La fibre de chaque point d'un ouvert V trivialisant le revêtement est en bijection avec un ensemble fini qui est le même sur tout V. On en déduit que l'application $b \mapsto \operatorname{card} p^{-1}(b)$ est localement constante, et en particulier continue, sur B. Comme B est connexe, elle est constante. □

(6) Si B est compact, alors E est compact si et seulement si les fibres de p sont finies.

Démonstration. Supposons E compact. Alors $p^{-1}(b)$ est fermé, donc compact, et discret, donc fini. Réciproquement, supposons que toutes les fibres de p soient finies.

Si on suppose que E est un espace métrique, on peut raisonner avec des suites. Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E. Comme B est compact, on peut extraire de la suite des $p(x_n)$ une suite, notée b_{n_k} convergent vers un point $b \in B$. Pour k assez grand, b_{n_k} est dans un voisinage V de b trivialisant le revêtement. Les x_{n_k} correspondants sont dans $p^{-1}(V) \cong V \times F$ et F est fini, donc un des $V \times \{f\}$ contient une infinité de x_{n_k}, et c'est une sous-suite qui converge vers un $x \in p^{-1}(b)$. Donc E est compact.

Si on ne suppose pas E métrique, il faut utiliser le fait que B, espace compact, est localement compact. Tout point de B possède donc un voisinage *compact* trivialisant le revêtement, et on peut recouvrir B par un nombre fini de tels compacts

$$B = K_1 \cup \cdots \cup K_n.$$

L'image réciproque $p^{-1}(K_i) \cong K_i \times F$ est une réunion finie de compacts, il en est donc de même de E, qui est donc aussi compact. □

(7) Un revêtement est un homéomorphisme local.

Démonstration. Soit $x \in E$ et soit V un voisinage de $p(x)$ trivialisant le revêtement, de sorte qu'on a un homéomorphisme Φ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, "p"'] & & V \times F \arrow[dl, "\mathrm{proj}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Notre x est dans $U = \Phi^{-1}(V \times \{f\})$ pour un f dans F. La *section*

$$\begin{aligned} V &\xrightarrow{\;s\;} U \\ b &\longmapsto \Phi^{-1}(b, f) \end{aligned}$$

est un inverse de $p\,|_U$, donc $p\,|_U$ est un homéomorphisme de U sur V. □

Les exemples les plus intéressants[3] de revêtements s'obtiennent en considérant un groupe discret G opérant sur un espace topologique E et en faisant le quotient $B = E/G$.

Proposition 1.7. *Soit E un espace topologique muni d'une opération proprement discontinue d'un groupe discret G. Alors l'application quotient*

$$p : E \longrightarrow E/G$$

est un revêtement.

Démonstration. Par définition d'une opération proprement discontinue, tout x de E a un voisinage ouvert V tel que $(g \cdot V) \cap V = \varnothing$ pour tout $g \neq 1$ dans G. On a vu aussi (remarque II-3.2) que la projection p est ouverte, donc $p : V \longrightarrow p(V) = U$ est un homéomorphisme. Maintenant l'application

$$\begin{aligned} p^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \\ y &\longmapsto (p(y), g_y) \end{aligned}$$

où g_y est l'unique élément de G tel que $g_y \cdot y \in V$ est une trivialisation locale. □

C'est le cas, par exemple, quand E est un espace localement compact sur lequel le groupe discret G opère proprement librement (proposition II-3.5).

Exemples 1.8

(1) On peut considérer le quotient de $\mathbf{R}^n$ par le sous-groupe $\mathbf{Z}^n$ opérant par translations. Le quotient est le *tore* T^n (figure 4).

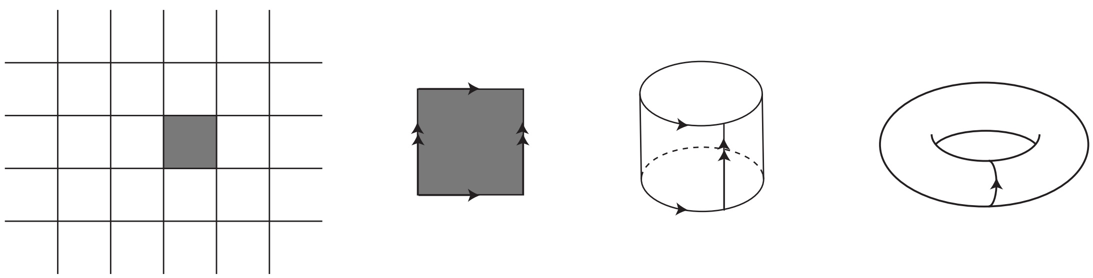


FIGURE 4. Le tore T^2

(2) On peut aussi considérer le sous-groupe $H \subset S^1$ des racines n-ièmes de 1. L'application quotient $p : S^1 \to S^1/H$ est un revêtement.
(3) L'application quotient $\mathbf{C} \to \mathbf{C}/2i\pi\mathbf{Z}$ est un revêtement.

2. L'application $z \mapsto z^n$, revêtements ramifiés

Les fonctions de variable complexe sont de grandes sources de revêtements. On a vu ce qu'il en était de l'exponentielle complexe. Considérons maintenant l'application $z \mapsto z^n$ de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. Ce ne peut être un revêtement : la fibre de 0 est constituée du seul élément 0 alors que toutes les autres fibres ont exactement n éléments.

Proposition 2.1. *L'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbf{C} - \{0\} &\longrightarrow \mathbf{C} - \{0\} \\ z &\longmapsto z^n \end{aligned}$$

est un revêtement à n feuillets.

[3] Tous les exemples, en fait, comme on va le voir plus tard.

Démonstration. On montre qu'il est trivial au-dessus des disques de $\mathbf{C} - \{0\}$. Sur un tel disque V on a une détermination continue du logarithme

$$g : V \longrightarrow \mathbf{C}$$

avec $\exp g(z) = z$. Alors

$$h(z) = \exp \frac{g(z)}{n}$$

définit une fonction continue h qui vérifie

$$h(z)^n = \left(\exp \frac{g(z)}{n}\right)^n = \exp g(z) = z$$

de sorte que h est une détermination continue de la racine n-ième sur V.

Appelons U_n le groupe (cyclique d'ordre n) des racines n-ièmes de l'unité. L'application

$$\begin{aligned} V \times U_n &\longrightarrow f^{-1}(V) \\ (z, \zeta) &\longmapsto \zeta h(z) \end{aligned}$$

est continue, elle fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} V \times U_n \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & f^{-1}(V) \arrow[dl, "f"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

et c'est un homéomorphisme, puisque son inverse Φ est donné par

$$u \longmapsto \left(u^n, \frac{u}{h(u^n)}\right).$$

Cet inverse est la trivialisation cherchée. $\square$

Remarque 2.2. L'application h utilisée est une détermination de la racine n-ième sur V, les autres s'en déduisent par multiplication par les $\zeta \in U_n$... une propriété que nous avons déjà rencontrée dans l'exercice I-I.6. Pour savoir sur quels ouverts de $\mathbf{C} - \{0\}$ existe une détermination de la racine n-ième, voir la proposition V-3.13.

Plus généralement, soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbf{C}$. Soit $z_0 \in U$. Il existe un disque ouvert D centré en z_0 tel que, sur D,

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)^n g(z) \text{ avec } g(z_0) \neq 0.$$

Quitte à rétrécir D, on peut supposer que g ne s'annule pas sur D. Alors f est un revêtement à n feuillets de $D - \{z_0\}$ sur son image. En utilisant une détermination (du logarithme et donc) de la racine n-ième, on peut en effet écrire

$$f(z) = f(z_0) + h(z)^n$$

où $h : D \to h(D)$ est holomorphe et injective au voisinage de z_0.

On dit que l'application $z \mapsto z^n$, définie cette fois même en 0, est un *revêtement ramifié*, le point 0 est un (le) *point de ramification*. Attention, un revêtement ramifié n'est pas un revêtement ! La figure 5 montre quelques représentations possibles, toutes imparfaites(4), du revêtement ramifié $z \mapsto z^2$.

(4) Comme c'est suggéré dans [**Rey90**], on pourra critiquer chacune de ces représentations.

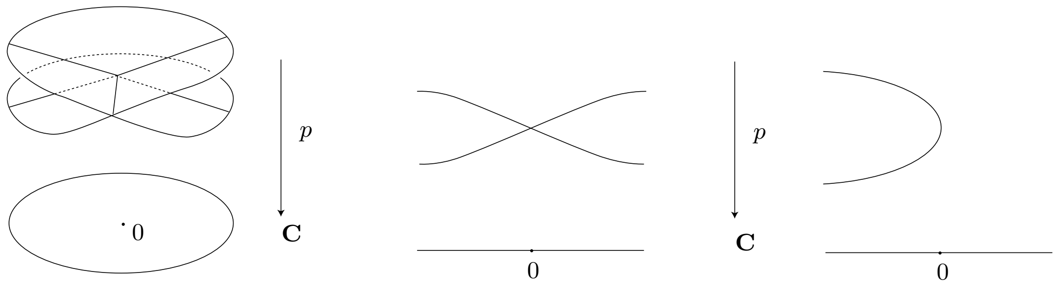


FIGURE 5. L'application $z \mapsto z^2$

3. Homomorphismes de revêtements

Si $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ sont deux revêtements, on appelle *homomorphisme* de p dans p' un couple d'applications continues $H : E \to E'$ et $h : B \to B'$ telles que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \xrightarrow{h} & B' \end{array}$$

soit commutatif.

Remarque 3.1. Alors H envoie $p^{-1}(b)$ dans la fibre $p'^{-1}(h(b))$.

Exemple 3.2. Ici $E = E' = B = B' = S^1$, p est le revêtement par $z \mapsto z^m$, p' est $z \mapsto z^n$, $H(z) = z^r$, $h(z) = z^s$. Le couple (H, h) est un morphisme de revêtements si et seulement si $ms = nr$.

Un *isomorphisme* est un homomorphisme dans lequel H et h sont des homéomorphismes. Si $E = E'$, $B = B'$ et $h = \mathrm{Id}$, on dit que H est un *automorphisme*. On appelle alors $\mathrm{Aut}(E)$ l'ensemble des automorphismes.

Exemple 3.3. Si $p : E \to B$ est un revêtement trivial $B \times F \to B$, alors les automorphismes de p sont les homéomorphismes $\Phi : B \times F \to B \times F$ tels que $p \circ \Phi = p$. On a donc $\Phi(b, f) = (b, \varphi(b, f))$ où φ est continue. Pour b fixé dans B, $f \mapsto \varphi(b, f)$ est une bijection de F dans lui-même. Pour tout f dans F, $b \mapsto \varphi(b, f)$ est une application localement constante de B dans l'espace discret F. Si on a supposé B connexe, cette application est constante, donc Φ est de la forme $\Phi(b, f) = (b, \sigma(f))$ pour une certaine permutation σ de F.

Proposition 3.4. *L'ensemble* $\mathrm{Aut}(E)$ *est un groupe. Muni de la topologie discrète, il opère continûment sur* E *et sur les fibres* $p^{-1}(b)$.

Démonstration. Il est clair que $\mathrm{Aut}(E)$ est un groupe, non moins clair que l'opération est continue, parce qu'on a muni $\mathrm{Aut}(E)$ de la topologie discrète : pour l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Aut}(E) \times E &\longrightarrow E \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

on a

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcup_{g \in \mathrm{Aut}(E)} \{g\} \times g^{-1}(U)$$

ce qui est bien une réunion d'ouverts quand U est ouvert. □

Exemple 3.5. Soit G un groupe discret opérant proprement et librement sur un espace localement compact E. Tout élément g de G définit un homéomorphisme $x \mapsto g \cdot x$ de E qui est un automorphisme du revêtement $E \to E/G$.

Revêtement tiré en arrière. On considère la situation d'un revêtement $p : E \to B$ et d'une application continue $h : B' \to B$. On va « tirer en arrière » le revêtement pour en déduire un revêtement de B' et un homomorphisme de revêtements dont h est la « flèche du bas ».

Théorème 3.6. *Soient $p : E \to B$ un revêtement et $h : B' \to B$ une application continue. Il existe un revêtement $p' : E' \to B'$ et une application continue $H : E' \to E$ avec les propriétés suivantes :*

(1) *Le couple (H, h) est un homomorphisme de revêtements.*
(2) *Si $q : D \to B'$ est un revêtement et $K : D \to E$ un homomorphisme de revêtements au-dessus de h, il existe un unique homomorphisme de revêtements $L : D \to E'$ tel que $K = H \circ L$.*

Un bon diagramme (commutatif) valant mieux qu'un long discours, le théorème affirme l'existence des flèches en pointillés (et l'unicité de L) dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, dotted, "L"] \arrow[drr, bend left, "K"] \arrow[ddr, bend right, "q"'] & & \\
& E' \arrow[r, dotted, "H"'] \arrow[d, dotted, "p'"] & E \arrow[d, "p"'] \\
& B' \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

Corollaire 3.7. *Le revêtement $p' : E' \to B'$ est unique à isomorphisme près.*

Démonstration du corollaire. Cette démonstration est très générale et montre « l'unicité à isomorphisme unique près » de toute solution d'un « problème universel[5] », ce qu'est le revêtement recherché.

Soit donc $\widetilde{p} : \widetilde{E} \to B'$ un autre revêtement satisfaisant aux mêmes propriétés, avec donc une application $\widetilde{H} : \widetilde{E} \to E$ telle que $(\widetilde{H}, h)$ soit un homomorphisme de revêtements. On utilise $\widetilde{E}$ à la place de D :

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{E} \arrow[dr, dotted, "L"] \arrow[drr, bend left, "\widetilde{H}"] \arrow[ddr, bend right, "\widetilde{p}"'] & & \\
& E' \arrow[r, dotted, "H"'] \arrow[d, dotted, "p'"] & E \arrow[d, "p"'] \\
& B' \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

et on en déduit un unique homomorphisme de revêtements $L : \widetilde{E} \to E'$ faisant commuter tous les diagrammes. On procède de même en échangeant $\widetilde{E}$ et E', on obtient un homomorphisme de revêtements $L' : E' \to \widetilde{E}$.

[5] On en a déjà rencontré un... sans le savoir, dans la proposition II-2.1. Voir le § VI-4 et les exercices du chapitre VI pour de nombreux autres exemples de problèmes universels.

Il reste à vérifier que $L \circ L'$ et $L' \circ L$ sont l'identité. On applique une troisième fois la propriété en mettant cette fois E' à la place de D.

$$\begin{tikzcd}
E' \arrow[dr, dotted, "L\circ L'"] \arrow[drr, bend left, "H"] \arrow[ddr, bend right, "p'"'] & & \\
& E' \arrow[r, dotted, "H"'] \arrow[d, dotted, "p'"] & E \arrow[d, "p"'] \\
& B' \arrow[r, "h"'] & B
\end{tikzcd}$$

Par unicité du morphisme obtenu, on obtient $L \circ L' = \mathrm{Id}_{E'}$. Il reste à appliquer une quatrième fois la propriété pour montrer que $L' \circ L = \mathrm{Id}_{\widetilde{E}}$. □

Démonstration du théorème. De même qu'il est très facile de montrer que la solution d'un problème universel est unique, il est très facile de démontrer que tel objet dont on suspecte qu'il est solution l'est effectivement.

Ici le suspect est, en plus, très facile à identifier. On connaît un espace qui a des applications vers E et B', le produit $E \times B'$... mais le diagramme fait avec les projections ne commute pas, ce qui suggère la solution. On pose

$$E' = \left\{(b', x) \in B' \times E \mid h(b') = p(x)\right\},$$

on appelle p' et H les restrictions des projections, de sorte que

$$p \circ H(b', x) = p(x) = h(b') = h \circ p'(b', x)$$

et donc que $p \circ H = h \circ p'$ (le diagramme carré commute).

Montrons que p' est un revêtement. Soient $b' \in B'$, $h(b') = b \in B$, V un voisinage de b qui trivialise le revêtement p et

$$\Phi : p^{-1}(V) \longrightarrow V \times F$$

une trivialisation. Alors $V' = h^{-1}(V)$ est un ouvert de B' et

$$\begin{array}{rcl} B' \times E \supset p'^{-1}(V') = p'^{-1}h^{-1}(V) & \xrightarrow{\Phi'} & V' \times F \\ (a', x) & \longmapsto & (a', \mathrm{pr}_2\Phi(x)) \end{array}$$

donne une trivialisation locale de p'.

On a donc bien construit un revêtement et un homomorphisme de revêtements. Il reste à vérifier sa qualité d'universalité. Soient donc $q : D \to B'$ un autre revêtement et K une application continue tels que (K, h) soit un homomorphisme de revêtements. La seule formule possible pour L est

$$L(x) = (q(x), K(x)).$$

□

Remarque 3.8. La construction de E' est à placer dans un cadre plus général que celui des revêtements, celui des « produits fibrés ». Voir les exercices III.16 et VI.29.

4. Revêtements des cubes

Le but de cette section est de démontrer que, sur les cubes $[0,1]^n$, tous les revêtements sont (globalement) triviaux.

Théorème 4.1. *Tout revêtement de* $[0,1]^n$ *est isomorphe au revêtement trivial.*

Démonstration. On peut recouvrir $[0,1]^n$ par des ouverts trivialisant le revêtement donné, en nombre fini puisque cet espace est compact. On peut donc écrire $[0,1]$ comme réunion d'une suite $I_1, \ldots, I_k$ de segments fermés contigus tels que le revêtement soit trivialisable sur chacun des petits cubes (parallélépipèdes) $I_{i_1} \times \cdots \times I_{i_n}$ (pour $1 \leq i_j \leq k$). On va montrer par récurrence sur ℓ que le revêtement est trivialisable sur
$$[0,1]^\ell \times I_{i_{\ell+1}} \times \cdots \times I_{i_n}$$
(pour $\ell = n$, c'est le théorème). L'assertion est vraie pour $\ell = 0$.

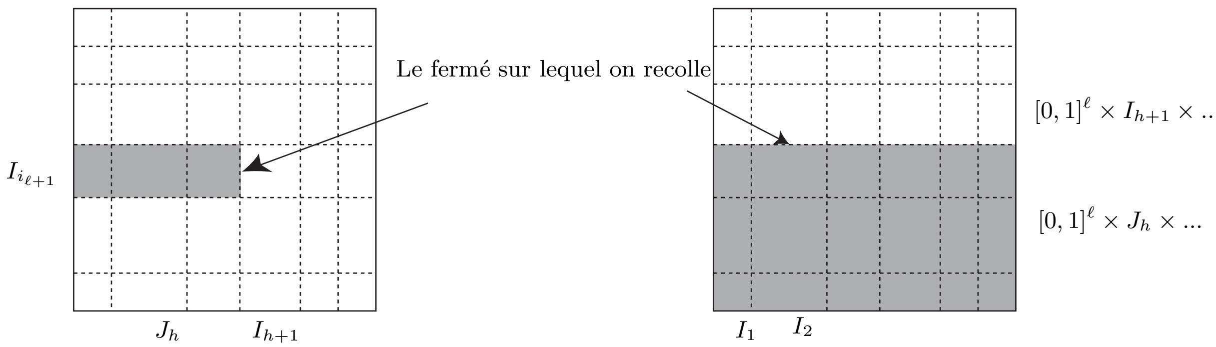


FIGURE 6. Les passages de $\ell = 0$ à $\ell = 1$ et de $\ell = n-1$ à $\ell = n$

Supposons la vraie pour $\ell < n$ et montrons que le revêtement est trivialisable au dessus de
$$[0,1]^{\ell+1} \times I_{i_{\ell+2}} \times \cdots \times I_{i_n}.$$
On appelle $J_1 = I_1$, $J_2 = I_1 \cup I_2$,..., $J_k = J_{k-1} \cup I_k = [0,1]$.

Le revêtement est trivialisable au dessus de $[0,1]^\ell \times J_1 \times I_{i_{l+2}} \times \cdots \times I_{i_n}$. On va montrer, de proche en proche, qu'il est trivialisable au dessus de
$$[0,1]^\ell \times J_2 \times I_{i_{l+2}} \times \cdots \times I_{i_n}, \ldots, [0,1]^\ell \times J_k \times I_{i_{l+2}} \times \cdots \times I_{i_n}.$$
On passe du numéro h au numéro $h+1$ en réunissant
$$[0,1]^\ell \times J_h \times I_{i_{l+2}} \times \cdots \times I_{i_n} \text{ avec } [0,1]^\ell \times I_{h+1} \times I_{i_{l+2}} \times \cdots \times I_{i_n}.$$
L'intersection de ces deux parallélépipèdes est $[0,1]^\ell \times (J_h \cap I_{h+1}) \times I_{i_{l+2}} \times \cdots \times I_{i_n}$. Mais $J_h \cap I_{h+1}$ est constitué d'un unique point (l'extrémité commune de I_h et I_{h+1}), ce dont nous retiendrons que c'est une partie connexe. Le théorème est maintenant conséquence du lemme suivant. $\square$

Lemme 4.2. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Soient B_1 et B_2 deux fermés de B tels que $B = B_1 \cup B_2$ et que $B_1 \cap B_2$ soit connexe et non vide. Si le revêtement est trivialisable au dessus de B_1 et de B_2, il est trivialisable au dessus de B.*

Remarque 4.3. Le lemme reste vrai si on remplace « fermés » par « ouverts ». L'hypothèse essentielle est que l'intersection $B_1 \cap B_2$ est connexe. Un contre-exemple simple est celui du cercle, qui peut être écrit comme réunion de deux arcs de cercle fermés (homéomorphes à des intervalles). Sur chacun d'eux, tout revêtement est trivialisable. Pourtant, nous savons que le cercle possède des revêtements qui ne sont pas globalement triviaux (c'est le cas de tout revêtement connexe à plus d'un feuillet). C'est que l'intersection des deux arcs de cercle n'est pas connexe.

Démonstration du lemme. On utilise des trivialisations
$$\Phi_1 : p^{-1}(B_1) \longrightarrow B_1 \times F_1 \text{ et } \Phi_2 : p^{-1}(B_2) \longrightarrow B_2 \times F_2.$$
La composition
$$\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1} : (B_1 \cap B_2) \times F_1 \longrightarrow (B_1 \cap B_2) \times F_2$$

est un isomorphisme de revêtements triviaux sur une base connexe. Comme $B_1 \cap B_2$ n'est pas vide, on a en particulier une bijection de F_2 sur F_1. On peut donc supposer que $F_2 = F_1 = F$ et que $\Phi_1 \circ \Phi_2^{-1}$ est un automorphisme du revêtement trivial $(B_1 \cap B_2) \times F \to (B_1 \cap B_2)$. Comme $B_1 \cap B_2$ est connexe, on a vu (exemple 3.3) que cet automorphisme est de la forme $(b, f) \mapsto (b, \sigma(f))$, pour une permutation σ de F. Définissons $\sigma_1 : B_1 \times F \to B_1 \times F$ par la même formule. Ainsi

$$\Phi_1^{-1} \circ \sigma_1 : B_1 \times F \longrightarrow p^{-1}(B_1)$$

est une trivialisation et, sur $(B_1 \cap B_2) \times F$, on a $\Phi_1^{-1} \circ \sigma_1 = \Phi_2^{-1}$. Enfin l'application $B \times F \to E$ qui coïncide avec $\Phi_1^{-1} \circ \sigma_1$ sur $B_1 \times F$ et avec Φ_2^{-1} sur $B_2 \times F$ est donc continue et définit clairement une trivialisation de p. □

5. Relèvement des applications

On considère un revêtement $p : E \to B$ et une application continue h d'un espace topologique X dans B. On appelle *relèvement* de h toute application continue $H : X \to E$ telle que $p \circ H = h$.

Remarque 5.1. Toutes les applications n'ont pas de relèvement ! Par exemple un relèvement de l'application identique $\mathrm{Id} : B \to B$ est une section de p, ce qui n'existe pas en général.

Proposition 5.2. *Soient $p : E \to B$ un revêtement, $h : B' \to B$ une application continue, $p' : E' \to B'$ le revêtement tiré en arrière et $H : E' \to E$ l'homomorphisme au dessus de h. L'application qui, à s, associe $H \circ s$ est une bijection de l'ensemble des sections de p' sur l'ensemble des relèvements de h.*

Démonstration. Ne résistons pas à l'appel du diagramme commutatif. Celui qui nous intéresse ici est

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "H"] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ B' \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}$$

Soit s une section de p'. Alors $H \circ s$ est un relèvement de h :

$$(p \circ H) \circ s = (h \circ p') \circ s = h$$

puisque $p' \circ s = \mathrm{Id}$. Réciproquement, si $K : B' \to E$ est un relèvement de h, s définie par

$$s(x) = (x, K(x)) \in E' \subset B' \times E$$

est bien une section de p' :

$$p' \circ s(x) = \mathrm{pr}_1(x, K(x)) = x.$$

□

Corollaire 5.3. *Soit $p : E \to B$ un revêtement et soit h une application continue de X dans B. Si X est connexe, deux relèvements de h qui coïncident en un point sont égaux.*

Remarque 5.4. Ce corollaire, qui va trouver de nombreuses applications dans la suite, est un énoncé d'unicité... mais n'affirme aucune existence.

Démonstration du corollaire. Deux relèvements de h qui coïncident en un point correspondent à deux sections du revêtement tiré en arrière qui coïncident en un point. On applique la proposition 1.6. □

Corollaire 5.5. *Soient $p : E \to B$ et $p' : E' \to B'$ deux revêtements et h une application continue de B' dans B. Si E' est connexe, deux homomorphismes de revêtements au dessus de h qui coïncident en un point sont égaux.*

Démonstration. Ce sont des relèvements de $h \circ p'$. $\square$

Corollaire 5.6. *Soit $p : E \to B$ un revêtement, avec E connexe, le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ opère librement sur E.*

Démonstration. Si g est un automorphisme de p, c'est un relèvement de l'application continue $p : E \to B$. Le stabilisateur d'un point $x \in E$ est formé de ceux de ces relèvements qui coïncident avec Id en x, il est donc réduit à l'identité. C'est dire que l'opération est libre. $\square$

Corollaire 5.7. *Soit G un groupe discret opérant proprement et librement sur un espace connexe et localement compact E. Le groupe des automorphismes du revêtement $p : E \to E/G$ est isomorphe à G.*

Démonstration. Si $g \in G$, il détermine un automorphisme de p puisque $p(g \cdot x) = p(x)$. Réciproquement, soit h un automorphisme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & E/G & \end{tikzcd}$$

Pour tout x dans E, on a $h(x) \in p^{-1}(p(x))$, qui est l'orbite de x sous l'opération de G, de sorte qu'il existe un élément g de G tel que $h(x) = g \cdot x$. maintenant l'automorphisme déterminé par g coïncide avec h en x, donc ils sont égaux. $\square$

Relèvements des chemins, des homotopies. De la trivialité des revêtements de l'intervalle et du carré, on déduit deux résultats de relèvement très utiles, ceux schématisés par les diagrammes suivants.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "c"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{c}"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1] \times [0,1]} \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

***Proposition 5.8* (Relèvement des chemins)**. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Soient b un point de B et x un point de la fibre de b. Pour toute application continue $c : [0,1] \to B$ (chemin) telle que $c(0) = b$, il existe un unique relèvement $\widetilde{c} : [0,1] \to E$ tel que $\widetilde{c}(0) = x$.*

Notons d'abord un corollaire agréable, le fait que toutes les fibres ont le même cardinal.

Corollaire 5.9. *Soit $p : E \to B$ un revêtement d'un espace connexe par arcs B. Soient b et b' deux points de B. Il existe une bijection entre les fibres $p^{-1}(b)$ et $p^{-1}(b')$. En particulier ces fibres ont le même cardinal.*

Démonstration. Soit c un chemin joignant b à b' dans B. Pour tout point x de la fibre $p^{-1}(b)$, relevons c en un chemin $\widetilde{c}$ d'origine x. Appelons x' l'extrémité de $\widetilde{c}$. C'est un point de $p^{-1}(b')$. On définit ainsi une application (celle qui à x associe x') de $p^{-1}(b)$ dans $p^{-1}(b')$. On voit qu'elle est bijective en utilisant le chemin $\overline{c}$ (c en sens inverse) pour obtenir l'application réciproque. $\square$

***Proposition 5.10* (Relèvement des homotopies)**. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Soient b un point de B et x un point de la fibre de b. Pour toute application continue*

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow B$$

telle que $H(0,0) = b$, il existe un unique relèvement $\widetilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to E$ tel que $\widetilde{H}(0,0) = x$.

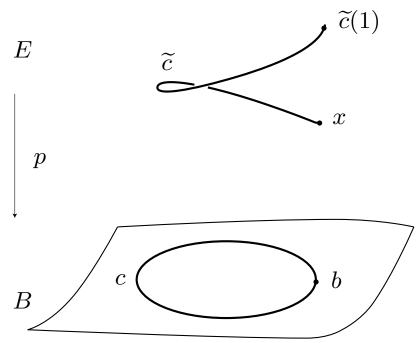


FIGURE 7. Relèvement d'un lacet dans B

Démonstration des deux propositions. Un relèvement de c, c'est une section du revêtement tiré en arrière sur $[0,1]$:

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, dotted, "C"] \arrow[d, dotted, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ {[0,1]} \arrow[r, "c"] & B \end{tikzcd}$$

Le revêtement q est trivial (théorème 4.1). Soit donc s une section (globale !) de q telle que $s(0) = (0, x)$. Alors $\widetilde{c} = C \circ s$ est un relèvement de c qui a les propriétés voulues. De plus, comme $[0,1]$ est connexe, on a unicité (deux relèvements coïncidant en un point sont égaux).

Dans le cas de l'application H définie sur le carré, on construit de même un relevé (unique) $\widetilde{H}$ tel que $\widetilde{H}(0,0) = x$. □

Remarque 5.11. J'ai parlé de relèvement des homotopies sans avoir défini le mot « homotopie ». Il s'agit d'un titre commode pour l'énoncé 5.10, la notion n'intervient pas dans l'énoncé lui-même. On y viendra au chapitre IV.

6. Revêtements galoisiens

Proposition 6.1. *Soit $p : E \to B$ un revêtement connexe. Le groupe* $\mathrm{Aut}(E)$ *opère proprement discontinument sur E.*

Démonstration. Montrons que l'opération de $\mathrm{Aut}(E)$ sur E est proprement discontinue. Soient x un point de E, $b = p(x)$, V un voisinage de b trivialisant le revêtement $(p^{-1}(V) \cong V \times F)$ et enfin U un voisinage de x tel que $p|_U$ soit un homéomorphisme de U sur V. Si $g \in \mathrm{Aut}(E)$, $g \cdot U$ est un des ouverts $V \times \{f\}$, donc $g \cdot U \cap U$ est vide ou égal à U. Si $g \cdot U = U$, $g \cdot x \in U$, mais x est le seul point de U dont l'image par p est b, donc $g \cdot x = x$. Comme on a déjà remarqué (corollaire 5.6) que l'opération était libre, on a $g = \mathrm{Id}$. □

Un revêtement $p : E \to B$ est *galoisien* si E est connexe par arcs et si le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ opère transitivement[6] sur les fibres de E. Le revêtement est alors dit *galoisien de groupe* $\mathrm{Aut}(E)$.

[6] C'est-à-dire avec une seule orbite.

Propriétés.

(1) Comme E est connexe, B l'est, il suffit que l'opération soit transitive sur *une* fibre : il n'est pas bien difficile de se convaincre que l'ensemble des points $b \in B$ tels que $\mathrm{Aut}(E)$ opère transitivement sur la fibre $p^{-1}(b)$ est à la fois ouvert et fermé dans B.
(2) La projection $E/\mathrm{Aut}(E) \to B$ est un homéomorphisme.
(3) Inversement, si G est un groupe discret opérant proprement et librement sur un espace connexe et localement compact E, le revêtement $p : E \to E/G$ est galoisien de groupe G.
(4) Si $p : E \to B$ est un revêtement galoisien, tout endomorphisme de p est un automorphisme.

Exercices

Sur la définition des revêtements

Dans ces premiers exercices $p : E \to B$ désigne un revêtement.

Exercice * ***III.1* (Une précaution en vaut deux)**. On suppose que B est séparé. Montrer que E est séparé. On suppose que B est localement connexe par arcs. Montrer que E est localement connexe par arcs.

Exercice * ***III.2***. On suppose que p est un revêtement à un feuillet. Montrer que p est un homéomorphisme.

Exercice * ***III.3***. On suppose B connexe et localement connexe. Soit C une composante connexe de E. Montrer que $p|_C : C \to B$ est un revêtement.

Exercice * ***III.4***. Montrer que l'application $z \mapsto z^2$ est un revêtement de $\mathbf{C} - \{0\}$ sur $\mathbf{C} - \{0\}$ et aussi de S^1 sur S^1. Est-ce un revêtement de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}$?

Exercice III.5. Soit $p : E \to B$ un homéomorphisme local dont toutes les fibres sont finies et ont le même cardinal. Montrer que p est un revêtement.

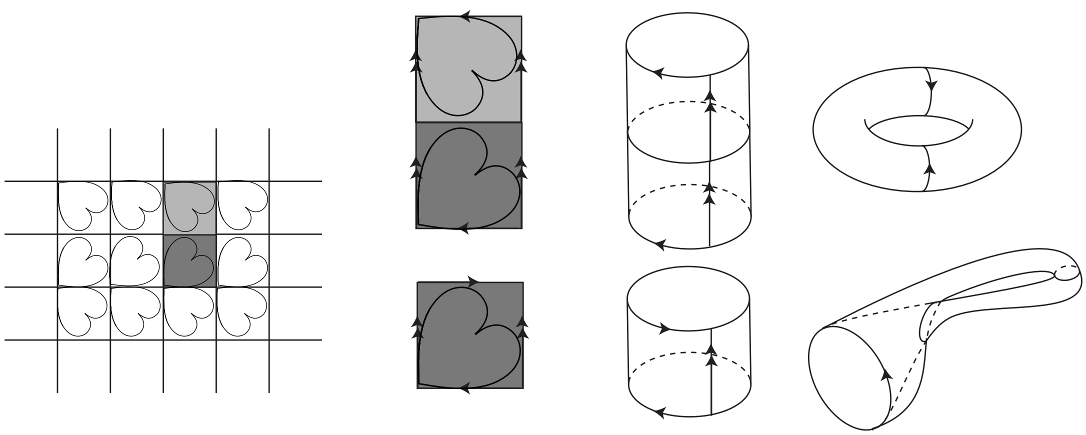


FIGURE 8. La bouteille de Klein et son revêtement double par le tore

Exercice * ***III.6* (Bouteille de Klein)**. On considère la relation d'équivalence sur $\mathbf{R}^2$ engendrée par

$$(x, y) \sim (x + 1, y) \text{ et } (x, y) \sim (-x, y + 1).$$

On appelle K l'espace quotient. Montrer que K est l'espace des orbites de l'opération sur $\mathbf{R}^2$ d'un sous-groupe[7] de son groupe d'isométries, que K est un espace topologique compact et connexe, que

[7] C'est un des dix-sept groupes de pavages du plan, comme le suggère la figure 8.

la projection $\mathbf{R}^2 \to K$ est un revêtement. Montrer qu'il existe un revêtement à deux feuillets (voir la figure 8) :

$$S^1 \times S^1 \longrightarrow K.$$

Exercice * ***III.7* (Examen, 2004)**. Dans cet exercice, on considère le cercle C d'équation $(x-R)^2+z^2 = r^2$ $(0 < r < R)$ dans le plan des (x, z), puis la surface de révolution T engendrée par ce cercle quand on lui fait subir les rotations autour de l'axe des z. On appelle A et B les deux points où C rencontre l'axe des x. On demande de faire une figure.

(1) À quel espace usuel (sphère, tore, plan projectif, disque...) la surface T est-elle homéomorphe ?

(2) Soit ρ la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{m}$ autour de l'axe des z (m est un entier positif). Montrer que le groupe de rotations G engendré par ρ opère proprement et librement sur T. Déterminer l'espace quotient T/G et l'application

$$p_\star : \pi_1(T) \longrightarrow \pi_1(T/G)$$

induite par la projection $p : T \to T/G$.

(3) On considère, dans le plan du cercle C, la symétrie s par rapport à l'axe des x. On appelle I le quotient C/s. À quel espace simple I est-il homéomorphe ? L'application quotient $C \to I$ est-elle un revêtement ?

(4) Soit σ le demi-tour autour de l'axe des x. Montrer que σ engendre un groupe H qui opère sur T. On appelle $q : T \to S = T/H$ l'application quotient. Est-ce un revêtement ? Que peut-on dire de la restriction de q à $T - \{A, B, -A, -B\}$?

(5) (Question subsidiaire)À quel espace usuel le quotient $S = T/H$ est-il homéomorphe ?

Homomorphismes

Exercice * ***III.8***. Soit $H \subset S^1$ le groupe des racines n-ièmes de 1. Montrer que S^1/H est homéomorphe à S^1.

Exercice * ***III.9***. On lit dans [**God71**, p. 112] qu'un homomorphisme de revêtements (H, h) est un isomorphisme si et seulement si H est un homéomorphisme. Démontrer cette assertion ou trouver un contre-exemple.

Exercice * ***III.10***. Le groupe des automorphismes du revêtement $z \mapsto z^n$, de S^1 dans S^1 est isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exercice * ***III.11***. Le groupe des automorphismes du revêtement $\exp : \mathbf{C} \to \mathbf{C} - \{0\}$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Exercice * ***III.12***. Montrer que la projection $S^n \to \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est un revêtement. Quel est son groupe d'automorphismes ? On suppose $n \geq 1$. Montrer que le revêtement est galoisien.

Exercice * ***III.13***. Soit

$$\begin{aligned} p : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n. \end{aligned}$$

Déterminer le revêtement tiré en arrière

$$\begin{tikzcd} & S^1 \arrow[d, "p"] \\ \mathrm{U}(n) \arrow[r, "\text{dét}"] & S^1. \end{tikzcd}$$

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{SU}(n) \times S^1 &\longrightarrow \mathrm{U}(n) \\ (A, z) &\longmapsto zA \end{aligned}$$

est un revêtement. Quel est son groupe d'automorphismes ?

Exercice * ***III.14***. Montrer qu'un revêtement connexe à deux feuillets est toujours galoisien.

Exercice III.15 **(Revêtements d'un graphe)**. On dit qu'un espace topologique X est un *graphe*[8] s'il possède une partition

$$X = \left(\coprod_{i\in I} A_i\right) \coprod \left(\coprod_{j\in J} \{s_j\}\right)$$

(en *arêtes* et *sommets*) et si, pour tout $i \in I$, il existe une application continue

$$f_i : [0,1] \longrightarrow X$$

telle que $f_i(0),\ f_i(1) \in \{s_j\}_{j\in J}$ et $f\ |_{]0,1[}$ est un homéomorphisme de $]0,1[$ sur A_i et s'il est de plus localement fini, au sens où tout point a un voisinage qui est un (sous-)graphe fini de X.

Démontrer que l'espace total de tout revêtement d'un graphe est un graphe[9].

Exercice III.16 **(Produits fibrés)**. Dans cet exercice, X, Y et S sont des espaces topologiques et $f : X \to S$, $g : Y \to S$ sont des applications continues. On définit

$$X \times_S Y = \{(x,y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}$$

et on le munit de la topologie induite par la topologie produit. On appelle g' et f' les restrictions des projections sur X et Y respectivement.

(1) Vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \times_S Y \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & S \end{tikzcd}$$

est commutatif. Soient Z un espace topologique, $p : Z \to X$ et $q : Z \to Y$ des applications continues telles que $f \circ p = g \circ q$. Montrer qu'il existe une unique application continue

$$h : Z \longrightarrow X \times_S Y$$

telle que $p = g' \circ h$ et $q = f' \circ h$. Montrer de plus que $X \times_S Y$, f' et g' sont caractérisés par cette propriété[10]. Montrer que, si $y \in Y$, g' induit un homéomorphisme de $f'^{-1}(y)$ sur $f^{-1}(g(y))$.

(2) Que se passe-t-il quand S est un point ? Quand f est l'inclusion d'un sous-espace X dans S ? Quand $X = S \times F$ et f est la première projection ?

(8) On n'a pas besoin ici de distinguer le graphe abstrait et sa réalisation. Pour les graphes en topologie algébrique, un sujet qui n'est pas vraiment traité dans le présent cours, on pourra consulter [**Hat02**].

(9) On n'hésitera pas à utiliser le théorème 4.1.

(10) Voir aussi l'exercice VI.29.

CHAPITRE IV

HOMOTOPIE DES CHEMINS, GROUPE FONDAMENTAL

Pour ce chapitre, on maintient les précautions exprimées au début du précédent.

Soit X un espace topologique. Comme dans ce qui précède, le mot *chemin* désigne toute application continue $c : [0,1] \to X$. Le point $c(0)$ est *l'origine* du chemin, le point $c(1)$ son *extrémité*.

Pour tout point x de X, on appelle c_x le chemin constant égal à x.

1. Homotopie

Soient c et c' deux chemins de même origine x et de même extrémité y. On dit que c est *homotope* à c' s'il existe une application continue, dite *homotopie*

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$$

telle que

– pour tout $t \in [0,1]$, $H(t,0) = c(t)$ et $H(t,1) = c'(t)$

– pour tout s dans $[0,1]$, $H(0,s) = x$ et $H(1,s) = y$.

Ceci est schématisé sur la figure 1.

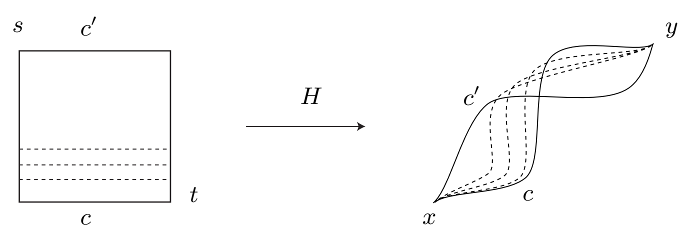


FIGURE 1

Remarque 1.1. Pour une homotopie de chemins, le chemin $t \mapsto H(t,s)$ a pour extrémités les points x et y : les extrémités sont fixes.

Proposition 1.2. *La relation « c est homotope à c' » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins.*

Démonstration. L'homotopie « constante » $H(t,s) = c(t)$ donne la réflexivité. Si H est une homotopie de c à c', la formule $H'(t,s) = H(t,1-s)$ donne une homotopie de c' à c et la symétrie de la relation. Pour la transitivité, supposons que H soit une homotopie de c à c' et H' une homotopie de c' à c''. Alors la formule

$$\widetilde{H}(t,s) = \begin{cases} H(t,2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H'(t,2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

(que je schématise sur la figure 2) donne une homotopie de c à c'' ce qui achève la démonstration. $\square$

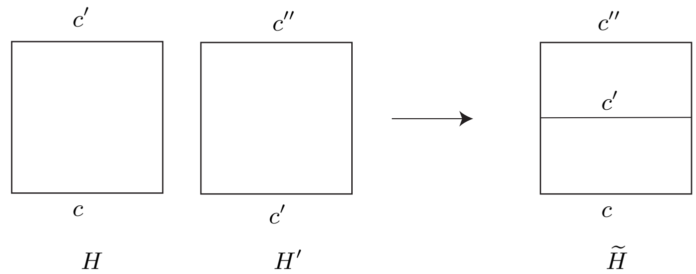


FIGURE 2

On peut *composer* deux chemins. Si c est un chemin de x à y et c' un chemin de y à z, on définit le chemin cc' de x à z en suivant d'abord c puis c'. En formule

$$cc'(t) = \begin{cases} c(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c'(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Tout chemin a un *chemin inverse*, le même parcouru dans l'autre sens. Si c est un chemin de x à y, on définit $\overline{c}$, chemin de y à x, par $\overline{c}(t) = c(1-t)$.

Proposition 1.3. *Soient c et γ deux chemins homotopes de x à y. Alors les chemins $\overline{c}$ et $\overline{\gamma}$ sont homotopes. Soient c' et γ' deux chemins homotopes de y à z. Alors les chemins cc' et $\gamma\gamma'$ sont homotopes.*

Démonstration. Si H est une homotopie de c à γ, alors $\overline{H}(t,s) = H(1-t,s)$ définit une homotopie de $\overline{c}$ à $\overline{\gamma}$.

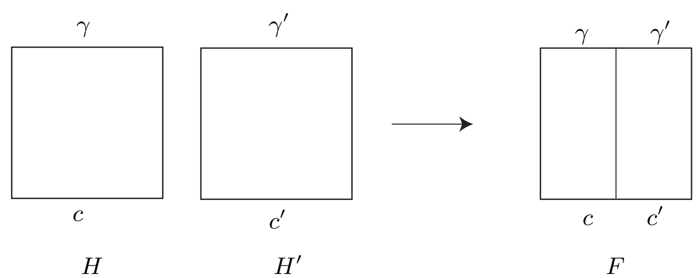


FIGURE 3

De même, si H' est une homotopie de c' à γ', alors

$$F(t,s) = \begin{cases} H(2t,s) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H'(2t-1,s) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

définit une homotopie de cc' à $\gamma\gamma'$, que l'on lit sur la figure 3. $\square$

La composition des chemins n'est pas associative, mais elle l'est « à homotopie près ».

Proposition 1.4. *Soient c un chemin de x à y, c' un chemin de y à z et c'' un chemin de z à u. Les chemins $(cc')c''$ et $c(c'c'')$ sont homotopes.*

Démonstration. Par définition, les chemins $(cc')c''$ et $c(c'c'')$ sont donnés par les formules

$$(cc')c''(t) = \begin{cases} c(4t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ c'(4t-1) & \text{si } \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c''(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

$$c(c'c'')(t) = \begin{cases} c(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c'(4t-2) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4} \\ c''(4t-3) & \text{si } \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

L'homotopie espérée est donnée par la figure 4, que l'on peut traduire en formules si l'on veut, lesquelles formules sont

$$H(t,s) = \begin{cases} c\left(\frac{4t}{1+s}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{4} \\ c'\left(4t-s-1\right) & \text{si } \frac{1+s}{4} \leq t \leq \frac{2+s}{4} \\ c''\left(\frac{4t-s-2}{2-s}\right) & \text{si } \frac{2+s}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

□

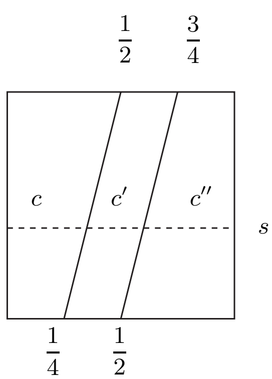


FIGURE 4

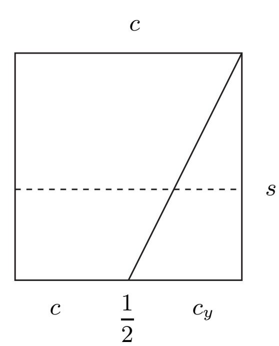


FIGURE 5

De même, la figure 5 donne la démonstration de la proposition suivante.

Proposition 1.5. *Soit c un chemin de x à y. Alors les chemins cc_y et c_xc sont homotopes à c.*

Démonstration. La figure 5 montre l'homotopie

$$H(t,s) = \begin{cases} c\left(\frac{2t}{1+s}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2} \\ y & \text{si } \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

de cc_y à c. Une figure et une formule analogues donneraient une homotopie de c_xc à c. □

Enfin, $\overline{c}$ est l'inverse de c à homotopie près :

Proposition 1.6. *Soit c un chemin de x à y. Alors $c\overline{c}$ est homotope à c_x et $\overline{c}c$ est homotope à c_y.*

Démonstration. La démonstration est donnée par les homotopies décrites sur la figure 6 : pour $s = 0$, on parcourt le chemin c jusqu'au bout, puis on fait demi-tour. Plus s grandit, moins on parcourt de c

avant de faire demi-tour, tant et si bien que, pour $s = 1$, on reste sur place. En formules

$$H(t,s) = \begin{cases} x & 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ c(2t-s) & \frac{s}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c(2-2t-s) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1-\frac{s}{2} \\ x & 1-\frac{s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

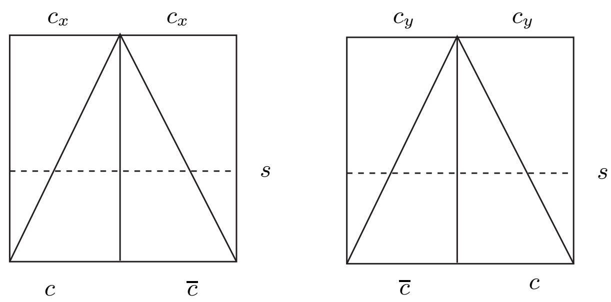


FIGURE 6

□

2. Groupe fondamental

Avec tout ça, on voudrait faire un groupe. Le problème est qu'on ne peut pas composer n'importe quels chemins[1] : l'extrémité du premier doit coïncider avec l'origine du deuxième.

On appelle *lacet* de base x, tout chemin dont l'origine *et* l'extrémité sont égales à x. On note $\pi_1(X,x)$ l'ensemble des classes d'homotopie des lacets de base x dans X. On peut enfin déduire de ce qu'on a fait dans le paragraphe précédent :

Théorème 2.1. *La composition des chemins définit une structure de groupe sur $\pi_1(X,x)$. L'élément neutre est la classe d'homotopie du lacet constant c_x, l'inverse de la classe d'homotopie de c est celle de $\overline{c}$.* □

Ce groupe est appelé le *groupe fondamental* de X, bien qu'à strictement parler il dépende aussi de x... et de façon non innocente. On a quand même :

Théorème 2.2. *Soit c un chemin de x à y dans X. Alors l'application*

$$\begin{aligned} \varphi_c : \pi_1(X,y) &\longrightarrow \pi_1(X,x) \\ [\gamma] &\longmapsto [c\gamma\overline{c}] \end{aligned}$$

est un isomorphisme qui ne dépend que de la classe d'homotopie de c.

Pour les espaces connexes par arcs, il n'est donc pas absurde de parler de groupe fondamental sans préciser le point base.

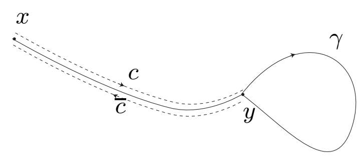
Corollaire 2.3. *Si x et y sont dans la même composante connexe par arcs de X, les groupes $\pi_1(X,x)$ et $\pi_1(X,y)$ sont isomorphes.* □

Démonstration du théorème. Montrons d'abord que φ_c est un morphisme de groupes. On a

$$\varphi_c([\gamma\gamma']) = [c\gamma\gamma'\overline{c}] = [c\gamma\overline{c}c\gamma'\overline{c}] = [c\gamma\overline{c}][c\gamma'\overline{c}] = \varphi_c([\gamma])\varphi_c([\gamma']).$$

---

[1] La structure présente est celle d'un *groupoïde*.



C'est une bijection, l'application $\varphi_{\overline{c}}$ étant son inverse. On a en effet, $\varphi_{\overline{c}} \circ \varphi_c([\gamma]) = \varphi_{\overline{c}}([c\gamma\overline{c}]) = [\overline{c}c\gamma\overline{c}c] = [\gamma]$. C'est donc bien un isomorphisme de groupes, il nous reste à étudier sa dépendance en c. Soit donc c' un autre chemin de x à y. On a

$$\begin{aligned}\varphi_{c'}([\gamma]) &= [c'\gamma\overline{c}'] \\ &= [c'\overline{c}c\gamma\overline{c}c\overline{c}'] \\ &= [c'\overline{c}][c\gamma\overline{c}][c'\overline{c}]^{-1} \\ &= [c'\overline{c}]\varphi_c([\gamma])[c'\overline{c}]^{-1}.\end{aligned}$$

Si de plus c et c' sont homotopes, $[c'\overline{c}] = [c_x]$ et donc $\varphi_c = \varphi_{c'}$. □

On dit qu'un espace connexe par arcs X est *simplement connexe* si le groupe $\pi_1(X, x)$ est trivial.

Proposition 2.4. *Soit X un espace connexe par arcs. Il est simplement connexe si et seulement si deux chemins de même origine et de même extrémité dans X sont toujours homotopes.*

Démonstration. La condition appliquée aux seuls lacets donne la trivialité du groupe fondamental. Réciproquement, supposons X simplement connexe. Soient c et c' deux chemins de x à y. Les lacets $\overline{c}c'$ et $c\overline{c}'$ sont homotopes aux lacets constants c_y et c_x respectivement. On a donc

$$[c] = [c][\overline{c}c'] = [c\overline{c}][c'] = [c_x][c'] = [c'].$$

□

3. Applications continues et groupe fondamental

L'idée est de comparer des espaces topologiques grâce à leurs groupes fondamentaux. On a associé, à chaque espace topologique muni d'un point base, un groupe. Il reste à savoir relier les groupes fondamentaux quand les espaces sont reliés.

À chaque application continue $f : X \to Y$, on va associer un *homomorphisme de groupes* $\pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$.

Théorème 3.1. *Soit $f : X \to Y$ une application continue. Elle induit un homomorphisme de groupes*

$$f_\star : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x)).$$

Si $g : Y \to Z$ est une autre application continue, on a

$$(g \circ f)_\star = g_\star \circ f_\star : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Z, g \circ f(x)).$$

De plus $\mathrm{Id}_\star = \mathrm{Id}$.

Démonstration. On commence par définir $f_\star$: au lacet de base x classe de l'application $c : [0, 1] \to X$, on associe le lacet $f \circ c : [0, 1] \to Y$ (un lacet de base $f(x)$). Il faut vérifier que la classe d'homotopie de $f \circ c$ ne dépend que de celle de c, ce qui est facile : si H est une homotopie de c à c', $f \circ H$ est une homotopie de $f \circ c$ à $f \circ c'$.

Les deux dernières assertions de l'énoncé étant complètement évidentes, il reste à vérifier que $f_\star$ est bien un homomorphisme de groupes. Mais c'est tout aussi facile, puisqu'on a déjà, au niveau des chemins, l'égalité

$$f \circ (cc') = (f \circ c)(f \circ c').$$

□

Remarque 3.2. On peut dire que la construction du groupe fondamental donne un foncteur de la catégorie des espaces topologiques pointés dans la catégorie des groupes.

Corollaire 3.3. *Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme, alors le morphisme induit $f_\star$ est un isomorphisme de groupes $\pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ d'inverse $(f^{-1})_\star$.*

Démonstration. On écrit

$$f_\star \circ (f^{-1})_\star = (f \circ f^{-1})_\star = \mathrm{Id}_\star = \mathrm{Id}$$

et de même pour la composition dans l'autre sens. □

Proposition 3.4. *Soit $i : C \to X$ l'inclusion d'une composante connexe par arcs. Soit $x \in C$. L'application*

$$i_\star : \pi_1(C, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il est clair que $i_\star$ est surjective : les lacets basés en x dans X sont contenus dans C. Montrons donc qu'elle est injective. Soit c un lacet, homotope par une homotopie H, au lacet constant c_x, alors

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$$

est à valeurs dans C. Donc c est homotope à c_x dans C. □

4. Invariance par homotopie

On a mis en évidence dans le paragraphe précédent des conditions pour que deux espaces topologiques aient « le même » groupe fondamental. On s'intéresse maintenant à des applications continues qui définissent le même homomorphisme.

On dit que deux applications continues $f, g : X \to Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue

$$H : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

telle que $H(x, 0) = f(x)$ et $H(x, 1) = g(x)$. Si A est une partie de X, on dit que f est homotope à g *relativement* à A si elles sont égales sur A et si elles sont homotopes par une homotopie H telle que

$$H(x, s) = f(x) = g(x) \text{ pour } x \in A.$$

Par exemple, avec la définition de l'homotopie des chemins que nous avons donnée au § 1, deux chemins homotopes sont deux applications continues de $[0, 1]$ dans X, qui sont homotopes relativement à $\{0, 1\} \subset [0, 1]$ (voir la remarque 1.1).

On démontre comme au § 1 que les deux relations « être homotope » et « être homotope relativement à A » sont des relations d'équivalence.

Proposition 4.1. *Si f et g sont deux applications continues de X dans Y, homotopes relativement à $\{x\} \subset X$, elles induisent le même homomorphisme de groupes*

$$f_\star = g_\star : \pi_1(X, x) \longrightarrow \pi_1(Y, f(x)).$$

Démonstration. Si F est une homotopie (relative) de f à g et si c est un lacet de base x dans X,

$$[0, 1] \times [0, 1] \xrightarrow{c \times \mathrm{Id}} X \times [0, 1] \xrightarrow{F} Y$$

est une homotopie de $f \circ c$ à $g \circ c$. □

Plus généralement, la même démonstration donne, si $f_i : X \to Y$ et $g_i : Y \to Z$ sont des applications continues avec f_0 homotope à f_1, g_0 homotope à g_1, que $g_0 \circ f_0$ est homotope à $g_1 \circ f_1$.

Type d'homotopie. On dit que deux espaces X et Y *ont le même type d'homotopie* s'il existe deux applications continues $f : X \to Y$ (une *équivalence d'homotopie*) et $g : Y \to X$ telles que les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes respectivement à Id_X et Id_Y. C'est une relation d'équivalence[(2)].

Exemples 4.2

(1) Deux espaces homéomorphes ont le même type d'homotopie.
(2) L'espace $\mathbf{R}^n$ a le même type d'homotopie qu'un point : on utilise pour f l'application constante de $\mathbf{R}^n$ sur $\{0\}$ et pour g l'inclusion de $\{0\}$ dans $\mathbf{R}^n$. La composition $f \circ g$ est l'application identique de $\{0\}$ dans lui même. L'application $g \circ f$ est l'application de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ qui est constante égale à 0. Elle est homotope à l'application $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^n}$ par l'homotopie $F(x, s) = sx$.
(3) La sphère S^{n-1} et l'espace $\mathbf{R}^n - \{0\}$ ont même type d'homotopie : on utilise pour f l'inclusion $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$ et pour g la projection radiale de $\mathbf{R}^n - \{0\}$, $g(x) = x/\|x\|$ (figure 7). La composée $g \circ f$ est l'identité de S^{n-1} et la composée $f \circ g$ est homotope à l'identité de $\mathbf{R}^n - \{0\}$ par l'homotopie
$$F(x, s) = sx + (1 - s)\frac{x}{\|x\|}.$$

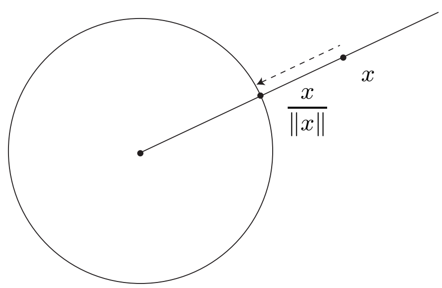


FIGURE 7. Équivalence d'homotopie (rétraction par déformation) de $\mathbf{R}^n - \{0\}$ sur la sphère S^{n-1}

Proposition 4.3. *Deux espaces connexes par arcs qui ont le même type d'homotopie ont des groupes fondamentaux isomorphes.*

Démonstration. Soient X et Y deux espaces connexes par arcs et $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ deux applications continues telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ soient homotopes aux applications identiques. On aimerait argumenter comme dans la démonstration du corollaire 3.3, $g_\star \circ f_\star = \mathrm{Id}$... mais il y a une petite difficulté à cause des points bases.

On considère la composition
$$\pi_1(X, x) \xrightarrow{f_\star} \pi_1(Y, f(x)) \xrightarrow{g_\star} \pi_1(X, g \circ f(x)).$$
Il y a un chemin c de $g \circ f(x)$ à x dans X, donné par l'homotopie de $g \circ f$ à Id_X. On montre que $g_\star \circ f_\star$ est l'application $\varphi_{\overline{c}}$ déjà apparue dans le théorème 2.2. C'est un cas particulier du lemme 4.4 ci-dessous.

Donc $g_\star \circ f_\star$ est un isomorphisme, donc $f_\star$ est injectif et $g_\star$ surjectif. En considérant de même $f_\star \circ g_\star$, on montre que $g_\star$ est injectif et $f_\star$ surjectif. □

Il reste à énoncer et démontrer :

[(2)] Je ne tiens pas à discuter ici le fait que cette « relation » soit ou ne soit pas définie sur un ensemble.

Lemme 4.4. *Soient h_0 et h_1 deux applications continues et homotopes de X dans Y. Soit $H : X \times [0,1] \to Y$ une homotopie de h_0 à h_1 et soit c le chemin de $h_0(x)$ à $h_1(x)$ dans Y défini par $c(s) = H(x,s)$. On a alors*

$$(h_1)_\star = \varphi_{\overline{c}} \circ (h_0)_\star.$$

Démonstration.

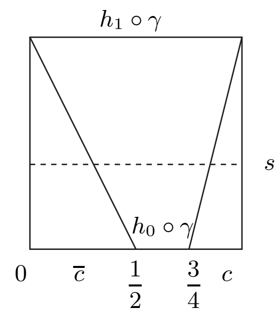
Considérons un lacet γ de base x dans X. La classe image de celle de γ,

$$(h_1)_\star[\gamma]$$

est la classe d'homotopie du lacet $h_1 \circ \gamma$ dans Y. La classe

$$\varphi_{\overline{c}} \circ (h_0)_\star[\gamma],$$

quant à elle, est celle du lacet composé $\overline{c}((h_0 \circ \gamma)c)$.



Il suffit donc d'écrire une homotopie entre ces deux lacets. La figure ci-contre montre comment en obtenir une, je laisse aux lecteurs le plaisir de vérifier que les formules suivantes donnent effectivement une telle homotopie :

$$F(t,s) = \begin{cases} \overline{c}(2t) = c(1-2t) & 0 \le t \le \frac{1-s}{2} \\ H\left(\gamma\left(\frac{4t+2s-2}{3s+1}\right), s\right) & \frac{1-s}{2} \le t \le \frac{s+3}{4} \\ c(4t-3) & \frac{s+3}{4} \le t \le 1. \end{cases}$$

□

Espaces contractiles. On dit qu'un espace est *contractile* s'il a le même type d'homotopie qu'un point. Notons qu'en particulier deux espaces contractiles ont le même type d'homotopie.

Corollaire 4.5. *Un espace contractile est simplement connexe.* □

Rétractes, rétractes par déformation. On dit qu'un sous-espace Y de X est un *rétracte* de X s'il existe une application continue (la *rétraction*) $r : X \to Y$ telle que $r(y) = y$ pour tout y dans Y.

Proposition 4.6. *Si $Y \subset X$ est un rétracte de X, alors*

$$i_\star : \pi_1(Y,y) \longrightarrow \pi_1(X,y)$$

est injective.

Démonstration. Comme $r \circ i = \mathrm{Id}_Y$, on a $r_\star \circ i_\star = \mathrm{Id}$, donc $i_\star$ est injective. □

À part ça, ce n'est pas une notion extrêmement utile. Par exemple, tout point de X est un rétracte de X. On dit que $Y \subset X$ est un *rétracte par déformation* de X s'il existe une rétraction $r : X \to Y$ qui soit homotope à Id_X relativement à Y. En d'autres termes, on a une rétraction r et une homotopie H telles que

$$\begin{cases} H(x,0) = x & \text{pour tout } x \in X \\ H(x,1) = r(x) \in Y & \text{pour tout } x \in X \\ H(y,s) = y & \text{pour tout } y \in Y \text{ et tout } s \in [0,1]. \end{cases}$$

Remarquons qu'une rétraction par déformation est une équivalence d'homotopie. On a donc beaucoup mieux que la proposition 4.6.

Proposition 4.7. *Si $Y \subset X$ est un rétracte par déformation de X, alors l'injection i de Y dans X induit un isomorphisme $i_\star$ de $\pi_1(Y,y)$ sur $\pi_1(X,y)$.* □

Exemple 4.8. L'injection de S^1 dans $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ induit un isomorphisme $\pi_1(S^1,x) \to \pi_1(\mathbf{R}^2 - \{0\}, x)$. Plus généralement, l'équivalence d'homotopie donnée dans l'exemple 4.2-(3) (et par la figure 7) est en fait une rétraction par déformation.

Produits.

Proposition 4.9. *Soient X et Y deux espaces topologiques, p_1 et p_2 les deux projections du produit $X \times Y$ sur les facteurs. L'application*

$$(p_1)_\star \times (p_2)_\star : \pi_1(X \times Y, (x, y)) \longrightarrow \pi_1(X, x) \times \pi_1(Y, y)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Si c_1 et c_2 sont des lacets respectivement dans X et Y, alors $t \mapsto (c_1(t), c_2(t))$ est un lacet dans $X \times Y$. On en déduit la surjectivité de $(p_1)_\star \times (p_2)_\star$.

Pour prouver son injectivité, on considère un lacet c de base (x, y) dans $X \times Y$ et deux homotopies H_1 de $p_1 \circ c$ à c_x et H_2 de $p_2 \circ c$ à c_y. Alors $H = (H_1, H_2)$ est une homotopie de c au lacet constant $c_{(x,y)}$. □

Exemple 4.10. Le groupe fondamental de $\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}$ est celui de $(\mathbf{C} - \{0\}) \times \mathbf{C}$, il est donc isomorphe au produit du groupe fondamental de $\mathbf{C} - \{0\}$ et de celui de $\mathbf{C}$. Le premier espace a le même type d'homotopie qu'un cercle, le deuxième est contractile. On conclut que le groupe fondamental de $\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}$ est isomorphe à celui du cercle.

Remarque 4.11. On n'a pas encore identifié un seul espace dont le groupe fondamental ne soit pas trivial. Conformément à ce qu'un énoncé idiot (exercice IV.11) laisse deviner, le groupe fondamental du cercle n'est pas trivial.

5. Le groupe fondamental du cercle

On considère le revêtement exponentiel de S^1 par $\mathbf{R}$. L'application

$$\gamma_1 = \exp|_{[0,1]} : [0, 1] \longrightarrow S^1$$

définit un lacet basé en 1 dans S^1 (on fait une fois le tour). On pose aussi, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\gamma_n(t) = \exp(2i\pi nt) \text{ pour } t \in [0, 1]$$

définissant ainsi un lacet γ_n (on fait n fois le tour). Le but de cette partie est de démontrer que le groupe fondamental du cercle est isomorphe à $\mathbf{Z}$, le lacet γ_n correspondant à l'entier n.

La démonstration est fondée sur les résultats de relèvement du § III-5. Soit c un lacet dans S^1. Il a un unique relevé $\widetilde{c}$ à $\mathbf{R}$ d'origine 0 (grâce à la proposition 5.8). Son extrémité $\widetilde{c}(1)$ est un élément de $\mathbf{R}$ que l'exponentielle envoie sur 1, autrement dit $\widetilde{c}(1)$ est un entier $n \in \mathbf{Z}$. On appelle cet entier le *degré* du lacet c. Par exemple, le degré de γ_n est n.

De la simple connexité de $\mathbf{R}$, on déduit :

Proposition 5.1. *Deux lacets c et c' de base 1 dans S^1 sont homotopes si et seulement s'ils ont le même degré.*

Démonstration. Si c et c' sont homotopes par une homotopie H, le lemme III-5.10 permet de relever H en une application continue

$$\widetilde{H} : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbf{R}.$$

La restriction $\widetilde{H}|_{\{1\}\times[0,1]}$ est continue, à valeurs dans $\mathbf{Z}$, donc constante, de sorte que c et c' ont même degré.

Réciproquement, dire que c et c' ont le même degré, c'est dire que les extrémités de leurs relevés $\widetilde{c}$ et $\widetilde{c'}$ d'origine 0 coïncident. On a ainsi deux chemins de même origine et de même extrémité dans $\mathbf{R}$. Ce dernier espace étant simplement connexe, ils sont homotopes et l'homotopie se projette en une homotopie de c à c'. □

Le degré est additif :

Proposition 5.2. *Si c et c' sont deux lacets de base 1 dans S^1, le degré de cc' est la somme des degrés de c et c'.*

Démonstration. On a par définition

$$cc'(t) = \begin{cases} c(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ c'(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Donc si $\widetilde{c}$ et $\widetilde{c'}$ sont les relèvements de c et c' d'origine 0, on a

$$\widetilde{cc'}(t) = \begin{cases} \widetilde{c}(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \widetilde{c}(1) + \widetilde{c'}(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

et $\widetilde{cc'}(1)$ donne le résultat espéré. ☐

Théorème 5.3. *L'application « degré » définit un isomorphisme*

$$\pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbf{Z}.$$

Démonstration. La proposition 5.2 assure que l'application « degré » de $\pi_1(S^1, 1)$ dans $\mathbf{Z}$ est un homomorphisme de groupes. La proposition 5.1 ajoute que cet homomorphisme est injectif. Il est surjectif grâce à l'existence, pour tout n, d'un lacet (γ_n) de degré n. ☐

Corollaire 5.4. *Le groupe fondamental du tore T^n est isomorphe à $\mathbf{Z}^n$.*

Le groupe fondamental d'un produit (ici celui de n copies de S^1) est isomorphe au produit des groupes fondamentaux (ce qu'affirme la proposition 4.9). ☐

Corollaire 5.5. *Le cercle n'est pas un rétracte du disque D^2.*

En effet, D^2 est contractile, donc simplement connexe, donc il n'est pas vrai que le groupe fondamental du cercle s'injecte dans celui du disque (voir la proposition 4.6). ☐

***Corollaire 5.6* (Théorème de Brouwer)**. *Toute application continue $f : D^2 \to D^2$ a un point fixe.*

En effet, comme on l'a dit dans l'introduction à ces notes, si f n'avait pas de point fixe, on en déduirait une rétraction du disque D^2 sur le cercle S^1. ☐

6. Version faible du théorème de van Kampen

Le théorème de van Kampen permet de « calculer » le groupe fondamental d'un espace à partir des groupes fondamentaux de morceaux de cet espace. On considère un espace connexe par arcs X décomposé en réunion

$$X = U_1 \cup U_2$$

de deux ouverts connexes par arcs non vides avec $U_1 \cap U_2$ connexe par arcs et non vide. On choisit un point base x dans cette intersection. Les inclusions $f_i : U_i \to X$ induisent des homomorphismes

$$\pi_1(U_i, x) \longrightarrow \pi_1(X, x).$$

La forme la plus faible de ce théorème dit simplement :

***Proposition 6.1* (Théorème de van Kampen faible)**. *Le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ est engendré par les images de $\pi_1(U_1, x)$ et de $\pi_1(U_2, x)$.*

La forme plus précise est assez difficile (même à énoncer). Elle fait l'objet du chapitre VI.

Démonstration. Soit $c : [0,1] \to X$ un lacet de base x dans X. Les deux ensembles $c^{-1}(U_1)$ et $c^{-1}(U_2)$ sont des ouverts de $[0,1]$. On écrit chacun comme une réunion d'intervalles ouverts,

$$c^{-1}(U_1) = \bigcup_{i\in I} I_{1,i} \text{ et } c^{-1}(U_2) = \bigcup_{j\in J} I_{2,j}.$$

On a ainsi un recouvrement de $[0,1]$ par des intervalles ouverts, on en extrait un recouvrement fini

$$[0,1] = [0, s_1[\cup]u_1, s_2[\cup \cdots \text{ avec } s_1 \leq s_2 \leq \cdots.$$

En choisissant $t_1 \in [0, s_1[\cap]u_1, s_2[$, etc, on en déduit une décomposition

$$[0,1] = [0,t_1] \cup \cdots \cup [t_{n-1}, 1]$$

telle que, pour chaque i, $c\,|_{[t_i,t_{i+1}]}$ soit à valeurs dans U_1 ou U_2 et $c(t_i) \in U_1 \cap U_2$.

On fixe enfin, pour chaque i, un chemin γ_i de $c(t_i)$ à x dans $U_1 \cap U_2$. Appelons $c_i : [0,1] \to X$ le chemin obtenu à partir de $c\,|_{[t_i,t_{i+1}]}$ par changement affine de paramètre :

$$c_i(t) = c((t_{i+1} - t_i)t + t_i).$$

On a ainsi

$$[c] = [c_0 \cdots c_{n-1}] = [c_0] \cdots [c_{n-1}] = [c_1\gamma_1][\overline{\gamma}_1 c_2 \gamma_2] \cdots [\overline{\gamma}_{n-1} c_{n-1}],$$

et on a écrit tout élément de $\pi_1(X,x)$ comme produit d'éléments venant de $\pi_1(U_1,x)$ ou de $\pi_1(U_2,x)$. □

Corollaire 6.2. *Si l'espace X est réunion de deux ouverts simplement connexes dont l'intersection est connexe par arcs, il est simplement connexe.* □

Corollaire 6.3. *Pour $n \geq 2$, la sphère S^n est simplement connexe.*

Démonstration. On écrit la sphère S^n (sphère unité de $\mathbf{R}^{n+1}$) comme réunion des deux ouverts

$$U_1 = S^n - \{N\}, \qquad U_2 = S^n - \{S\}$$

où N et S désignent un point et son opposé (pôles nord et sud).

Par projection stéréographique, chacun des deux ouverts est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$ (exercice II.7), donc simplement connexe. La même projection stéréographique définit un homéomorphisme de $U_1 \cap U_2$ sur $\mathbf{R}^n - \{0\}$: la projection stéréographique de pôle N envoie S, point diamétralement opposé à N, sur 0. Mais l'espace $\mathbf{R}^n - \{0\}$ est homéomorphe à $S^{n-1} \times \mathbf{R}$. Il est donc connexe puisque $n - 1 \geq 1$. On peut donc appliquer le corollaire 6.2. □

Remarque 6.4. Attention, si $n = 1$, le complémentaire de deux points dans S^1 n'est pas connexe, le corollaire ne s'applique pas. Et on a vu en effet que S^1 n'est pas simplement connexe.

Corollaire 6.5. *Sauf si $m = n = 1$, le tore T^m n'est pas homéomorphe à la sphère S^n.*

Démonstration. On applique le corollaire 3.3. Le groupe fondamental de T^m est isomorphe à $\mathbf{Z}^m$ alors que celui de S^n est trivial pour $n \neq 1$. □

***Corollaire 6.6* (Invariance du domaine)**. *Si $n \neq 2$, $\mathbf{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{R}^n$.*

Démonstration. Le cas $n = 1$ est laissé aux lecteurs. Supposons $n \geq 3$ et supposons que $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^n$ soit un homéomorphisme. Il induit un homéomorphisme de $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ sur $\mathbf{R}^n - \{f(0)\}$ et donc un isomorphisme entre les groupes fondamentaux de ces espaces. Mais le groupe fondamental de $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ est isomorphe à celui de $S^1 \times \mathbf{R}$, donc à $\mathbf{Z}$, alors que celui de $\mathbf{R}^n - \{f(0)\}$ est, pour $n \geq 3$, trivial. □

Remarque 6.7. Le résultat le plus général est qu'un ouvert de $\mathbf{R}^m$ ne peut être homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^n$ que si $n = m$. Voir cet énoncé plus général, toujours dans le cas $m = 2$, dans l'exercice IV.33.

Exercices

Sur les homotopies et la définition du groupe fondamental

***Exercice** *IV.1* (Invariance par reparamétrage)**. Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une application continue[(3)] telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = 1$. Soit $c : [0,1] \to X$ un chemin dans un espace topologique X. Vérifier que la formule $H(t,s) = c((1-s)t + s\varphi(t))$ définit une homotopie entre c et $c \circ \varphi$.

En déduire une démonstration sans formule des propositions 1.4 et 1.5.

Exercice** *IV.2. Deux applications continues d'un espace X dans une partie convexe de $\mathbf{R}^n$ sont homotopes.

Exercice** *IV.3. Un espace contractile est connexe par arcs.

Exercice** *IV.4. Un espace est contractile si et seulement si l'application identique est homotope à une application constante.

Exercice** *IV.5. Une partie étoilée de $\mathbf{R}^n$ est contractile.

Exercice** *IV.6. Soit X un espace topologique. Montrer que le cône CX (exercice II.19) est contractile.

Exercice** *IV.7. Montrer qu'une application continue $f : X \to Y$ est homotope à une application constante si et seulement si elle se prolonge en une application continue $CX \to Y$ définie sur le cône sur X (on identifie X à la « base » du cône).

À quelle condition une application continue $f : S^n \to Y$ est-elle homotope à une application constante ?

Exercice** *IV.8. On dit qu'un graphe (exercice III.15) est un *arbre* s'il est connexe et si le complémentaire de chacune de ses arêtes a deux composantes connexes.

Montrer qu'un arbre fini est contractile.

Exercice** *IV.9. Trouver un sous-espace du tore $S^1 \times S^1$ homéomorphe à un « huit » (figure 3 du chapitre II) et une rétraction par déformation de $S^1 \times S^1$ privé d'un point sur cet espace.

Exercice** *IV.10. Le quotient C du rectangle $[0,1] \times [-1,1]$ par la relation d'équivalence qui identifie $(0,t)$ à $(1,t)$ est un cylindre. Le quotient M du rectangle $[0,1] \times [-1,1]$ par la relation d'équivalence qui identifie $(0,t)$ à $(1,-t)$ est une « bande de Möbius ». Montrer que C et M se rétractent par déformation sur un cercle.

***Exercice** *IV.11* (Un exercice idiot)**. Supposons qu'il existe un espace X tel que $\pi_1(X,x)$ ne soit pas le groupe trivial. Montrer que $\pi_1(S^1,1)$ n'est pas le groupe trivial.

***Exercice** *IV.12* (Un autre)**. Supposons qu'il existe un espace X tel que $\pi_1(X,x)$ ne soit pas un groupe abélien. Montrer que le groupe fondamental de l'espace en forme de huit (exemple II-2.10) n'est pas abélien.

Exercice IV.13. Soit X un espace localement compact. Deux applications continues sont homotopes si et seulement si il existe un chemin de f à g dans $\mathcal{C}(X,Y)$ (avec la topologie « compact-ouvert » définie dans l'exercice II.10). L'ensemble des classes d'homotopie d'applications de X dans Y est l'ensemble des composantes par arcs de $\mathcal{C}(X,Y)$.

Exercice IV.14. L'espace $\mathcal{C}(I,X)$ des chemins dans X est muni de la topologie compact-ouvert (exercice II.10). On fixe un point $x \in X$, on définit $E_x \subset \mathcal{C}(I,X)$ comme l'espace des chemine d'origine x. Montrer que E_x est contractile.

---

(3) Si le résultat est vrai dans cette généralité, φ n'est, à proprement parler, un *reparamétrage* que si c'est un homéomorphisme.

Exercice IV.15. On garde les notations de l'exercice précédent et on note $\Omega_x \subset E_x$ l'espace des lacets de base x. Montrer que

– La composition des lacets est une application continue

$$\Omega_x \times \Omega_x \longrightarrow \Omega_x.$$

– L'application $c \mapsto \overline{c}$ est un homéomorphisme de Ω_x sur lui-même.
– Les applications $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_1c_2)c_3$ et $(c_1, c_2, c_3) \mapsto c_1(c_2c_3)$ de $\Omega_x \times \Omega_x \times \Omega_x$ dans Ω_x sont homotopes.
– Les applications $c \mapsto cc_x$ et $c \mapsto c_xc$ sont homotopes à l'application identique de Ω_x.
– Les applications $c \mapsto c\overline{c}$ et $c \mapsto \overline{c}c$ sont homotopes à l'application constante $\Omega_x \to \{x\}$.

En déduire que l'ensemble des composantes connexes par arcs de Ω_x possède une structure de groupe et que ce groupe est isomorphe à $\pi_1(X, x)$.

Autour du groupe fondamental du cercle

Exercice * ***IV.16* (Indice)**. Soient $a \in \mathbf{C}$ et $\gamma : [0, 1] \to \mathbf{C} - \{a\}$ un lacet basé en un point z_0.

(1) Montrer qu'il existe une suite finie

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = 1$$

telle que chaque $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ soit contenu dans un ouvert de $\mathbf{C} - \{a\}$ sur lequel existe une détermination continue de « $\log(z - a)$ ».

(2) En déduire que

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} \in \mathbf{Z}.$$

On appelle $I(\gamma, a)$, *l'indice* du lacet γ par rapport au point a, cet entier.

(3) Montrer que[(4)] $\gamma \mapsto I(\gamma, a)$ définit un isomorphisme de groupes de $\pi_1(\mathbf{C} - \{a\}, z_0)$ dans $\mathbf{Z}$.
(4) Montrer que l'application $a \mapsto I(\gamma, a)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbf{C} - \gamma([0, 1])$.
(5) Montrer que $\mathbf{C} - \gamma([0, 1])$ a une unique composante connexe non bornée et que $a \mapsto I(\gamma, a)$ est nulle sur cette composante.
(6) Déterminer $I(\gamma, a)$ dans les cas représentés sur la figure 8.

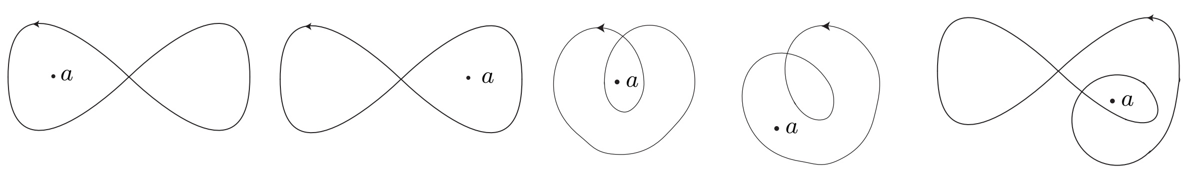


FIGURE 8

(7) Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2(t)}.$$

Exercice * ***IV.17* (Le théorème de d'Alembert)**. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$, $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme unitaire de degré $n \geq 1$. On veut montrer que P a une racine dans $\mathbf{C}$. Supposons que ce ne soit pas le cas. On considère les applications définies de S^1 dans $\mathbf{C}$ par

$$P_t(z) = P(tz) \text{ et } f_t(z) = t^n z^n, \text{ où } t \text{ est un paramètre réel.}$$

(1) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, P_t est une application de S^1 dans $\mathbf{C} - \{0\}$, homotope à l'application constante égale à $P(0)$. Que vaut l'indice[(5)] $I(P_t, 0)$?

[(4)] On rappelle que l'intégrale d'une fonction holomorphe dans un ouvert U sur un chemin dans U ne dépend que de la classe d'homotopie de ce chemin.
[(5)] Exercice IV.16.

(2) Montrer que, pour tout $t > 0$, f_t est un lacet dans $\mathbf{C} - \{0\}$, homotope au lacet f_1. Que vaut $I(f_t, 0)$?

(3) Montrer que
$$\text{pour } t \geq 1 + |a_{n-1}| + \cdots + |a_0|\,,\ \text{ on a } \ |f_t(z) - P_t(z)| < t^n \ \text{ pour tout } z \in S^1.$$

(4) En déduire que, pour t assez grand, les lacets P_t et f_t sont homotopes et conclure.

Exercice*** **IV.18. Quel est le groupe fondamental de $\mathrm{O}^+(2)$? Celui de $\mathrm{GL}^+(2;\mathbf{R})$?

***Exercice*** **IV.19** **(Le groupe fondamental d'un groupe est abélien)**. Le but de cet exercice est de démontrer que les deux façons qui permettent de « multiplier » des lacets dans un *groupe* topologique, à savoir, les composer comme dans n'importe quel espace topologique et les multiplier en utilisant la loi du groupe définissent (et heureusement !) la même loi au niveau du groupe fondamental. Un sous-produit de la démonstration est que ce groupe fondamental sera, toujours, abélien.

(1) Déterminer et dessiner l'image dans $\mathbf{R}^2$ du carré $[0,1] \times [0,1]$ par l'application
$$(t,s) \longmapsto \begin{cases} ((1-s)2t + ts, ts) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (ts + 1 - s, (1-s)(2t-1) + ts) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$
en précisant les images des segments horizontaux ($s =$ constante).

(2) Soit G un groupe topologique et soient c, c' deux lacets basés en l'élément neutre de G. On considère l'application
$$\begin{aligned} F : [0,1] \times [0,1] &\longrightarrow G \\ (u,v) &\longmapsto c(u) \cdot c'(v) \end{aligned}$$
(multiplication dans le groupe). Quel est le lacet image de la diagonale $u = v$? Montrer que ce lacet « produit » est homotope au lacet composé cc'. Montrer de même qu'il est homotope au lacet composé $c'c$.

(3) Montrer que le groupe fondamental d'un groupe topologique est toujours abélien.

***Exercice*** **IV.20** **(La fibration de Hopf)**. On considère la projection naturelle $\mathbf{C}^2 - \{0\} \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et sa restriction p à la sphère unité
$$p : S^3 \longrightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{C}).$$
Vérifier que toutes les fibres de p sont des cercles mais que S^3 n'est pas homéomorphe au produit $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times S^1$.

***Exercice*** **IV.21** **(De $\mathrm{O}^+(2)$ à $\mathrm{O}^+(3)$)**. Soit φ une rotation du plan et soit ρ une symétrie orthogonale par rapport à une droite du plan. Quelle est la transformation $\rho\varphi\rho^{-1}$?

On considère maintenant le plan $\mathbf{R}^2$ comme plan « horizontal » dans $\mathbf{R}^3$, le supplémentaire orthogonal étant appelé « axe Oz ». Soit φ une rotation d'axe Oz et soit ρ un retournement(6) de droite $D \subset \mathbf{R}^2$. Quelle est la transformation $\rho\varphi\rho^{-1}$?

On considère l'inclusion $i : \mathrm{O}^+(2) \to \mathrm{O}^+(3)$ induite par l'inclusion du plan horizontal. Montrer que les éléments de $\pi_1(\mathrm{O}^+(2))$ sont envoyés sur des éléments (triviaux ou) d'ordre 2 dans $\pi_1(\mathrm{O}^+(3))$.

***Exercice*** **IV.22** **(Théorème de la sphère chevelue)**. On démontre dans cet exercice que tout champ de vecteurs tangents à la sphère de dimension 2 s'annule quelque part, en d'autres termes qu'« on ne peut pas coiffer une tête sans épi(7) ». Supposons donc qu'on ait une application continue
$$v : S^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$$

(6) C'est-à-dire une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace de codimension 2, ici donc une droite.

(7) Le même résultat est vrai pour toutes les sphères de dimensions paires. Sur les sphères de dimensions impaires, il est au contraire très facile de construire un champ de vecteurs qui ne s'annule pas : on considère la sphère comme sphère unité d'un espace complexe et on pose $v(x) = ix$. Un problème difficile est de déterminer le nombre maximal de champs de vecteurs indépendants sur une sphère de dimension n donnée. La résolution de ce problème par Adams en 1962 a été l'un des grands succès de la topologie algébrique.

telle que, pour tout $x \in S^2$, $v(x)$ soit un vecteur orthogonal à x (tangent à la sphère), avec $v(x) \neq 0$ pour tout x. Quitte à le diviser par sa norme, on peut alors supposer (et on le fait) que $v(x)$ est un vecteur unitaire. Montrer que l'application s qui, à x, associe la matrice dont les colonnes sont

$$v(x), x \wedge v(x), x$$

est à valeurs dans $\mathrm{O}^+(3)$. Appelons N le pôle nord (vecteur unitaire de l'axe Oz, avec les notations de l'exercice IV.21) et considérons l'application

$$\begin{aligned} p : \mathrm{O}^+(3) &\longrightarrow S^2 \\ A &\longmapsto A \cdot N. \end{aligned}$$

Vérifier que $p \circ s = \mathrm{Id}_{S^2}$ et en déduire un homéomorphisme

$$\begin{aligned} S^2 \times \mathrm{O}^+(2) &\longrightarrow \mathrm{O}^+(3) \\ (z, A) &\longmapsto s(z) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de l'exercice IV.21, aboutir à une contradiction.

Question subsidiaire. En contemplant la figure 9, construire un champ de vecteurs tangent à la sphère avec un zéro au pôle nord et un autre au pôle sud, respectivement avec un unique zéro au pôle nord.

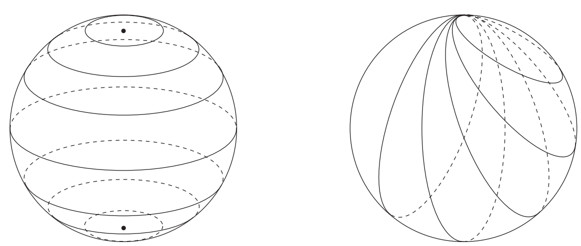


FIGURE 9

***Exercice IV.23* (Monodromie).** On considère une équation différentielle linéaire

$$\frac{dY}{dz} = A(z)Y(z)$$

où $A(z)$ est une matrice $n \times n$ complexe dont les coefficients sont des fonctions méromorphes de z. On suppose que 0 est un pôle de A et on se place sur un voisinage U de 0 dans lequel A n'a pas d'autre pôle.

(1) Soit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ une base de $\mathbf{C}^n$ et soit $z_0 \in U - \{0\}$. Rappeler[(8)] pourquoi il existe des solutions $(Y_1(z), \ldots, Y_n(z))$ définies sur un voisinage V de z_0 et telles que $Y_i(z_0) = Y_i$.

(2) On suppose que $n = 1$ et $A(z) = \alpha/z$ pour $\alpha \in \mathbf{C}$. Déterminer les solutions définies au voisinage de $z_0 = 1$.

(3) On suppose maintenant que $n = 2$ et

$$A(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les solutions $Y_1(z), Y_2(z)$ définies au voisinage de $z_0 = 1$ et telles que (Y_1, Y_2) soit la base canonique de $\mathbf{C}^2$.

[(8)] Voir au besoin [**Val45**, chap. VI].

(4) On revient au cas général. Soit c un lacet dans $U - \{0\}$, basé en z_0. Montrer qu'il existe une unique application continue

$$\widetilde{c} : [0,1] \longrightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbf{C})$$

telle que $\widetilde{c}(z_0)$ soit la matrice des vecteurs colonnes $(Y_1, \dots, Y_n)$ et, pour t assez petit pour que $c(t)$ soit dans un voisinage V de z_0 comme celui de la question (1),

$$\widetilde{c}(t) = (Y_1(c(t)), \dots, Y_n(c(t))).$$

(5) Montrer que l'application $c \mapsto \widetilde{c}(1)$ définit un homomorphisme

$$\pi_1(U - \{0\}, z_0) \longrightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbf{C}).$$

(6) Déterminer cet homomorphisme et le sous-groupe image dans l'exemple étudié à la question (2), selon que $\alpha \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in \mathbf{Q} - \mathbf{Z}$, $\alpha \in \mathbf{C} - \mathbf{Q}$.

(7) Même question pour l'exemple de la question (3).

Calculs de groupes fondamentaux

Exercice** *IV.24. Soit X un espace connexe par arcs. Montrer que la suspension SX est simplement connexe.

Exercice** *IV.25. Soit $z \in S^1$. Montrer que $S^1 \times \{z\}$ est un rétracte de $S^1 \times S^1$... mais pas un rétracte par déformation.

Exercice** *IV.26. Déterminer le groupe fondamental de $\mathbf{R}^m - \mathbf{R}^n$ ($m \geq n + 2$[9]), celui de $\mathbf{C}^2 - \mathbf{C}$.

Exercice** *IV.27. Déterminer le groupe fondamental du complémentaire dans $\mathbf{C}^2$ de la réunion de deux droites concourantes.

Exercice IV.28. Soit $U_{\mathbf{R}}$ (respectivement $U_{\mathbf{C}}$) le complémentaire de $x^2+y^2 = 0$ dans $\mathbf{R}^2$ (respectivement dans $\mathbf{C}^2$). Déterminer les groupes fondamentaux de $U_{\mathbf{R}}$ et $\mathrm{U}_{\mathbf{C}}$. On considère maintenant l'inclusion naturelle $j : U_{\mathbf{R}}$ dans $U_{\mathbf{C}}$, induite par l'inclusion de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. Déterminer l'homomorphisme $j_\star$.

Exercice** *IV.29. Quel est le groupe fondamental de la bande de Möbius (exercice IV.10) ?

Exercice** *IV.30. L'inclusion $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^n \times 0 \to \mathbf{R}^{n+1}$ induit une inclusion $S^{n-1} \to S^n$. Vérifier qu'elle induit aussi une inclusion $j : \mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R}) \to \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. À quoi le complémentaire de $j(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R}))$ est-il homéomorphe ?

On suppose $n \geq 2$. Soit x un point de $\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R})$. Montrer que l'homomorphisme

$$j_\star : \pi_1(\mathbf{P}^{n-1}(\mathbf{R}), x) \longrightarrow \pi_1(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}), j(x))$$

est surjectif et expliciter cet homomorphisme.

Exercice** *IV.31. Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients entiers. Montrer qu'elle définit une application, notée h, du tore $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ dans lui-même. Quelle est l'application $h_\star$?

***Exercice** *IV.32* (Le groupe $\mathrm{SU}(n)$ est simplement connexe)**. On considère la sphère unité

$$S^{2n+1} = \left\{ z = (z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} |z_i|^2 = 1 \right\}$$

et son pôle nord $N = (0, \dots, 0, 1)$. Soit enfin

$$\begin{aligned} p : \mathrm{SU}(n+1) &\longrightarrow S^{2n+1} \\ A &\longmapsto A \cdot N. \end{aligned}$$

[9] Pourquoi cette restriction ?

(1) Montrer que p est surjective et que $p^{-1}(N)$ est un sous-groupe de $\mathrm{SU}(n+1)$ qui s'identifie à $\mathrm{SU}(n)$.
(2) Étant donné un vecteur z de la sphère ($z \neq -N$), montrer qu'il existe un unique élément de $\mathrm{SU}(n+1)$ qui envoie N sur z et fixe le sous-espace orthogonal[10] à celui engendré par N et z (tout se jouant dans un plan, on pourra considérer d'abord le cas de $\mathrm{SU}(2)$).
(3) Montrer qu'il existe une section continue s de p au dessus de $S^{2n+1} - \{-N\}$, c'est-à-dire une application continue
$$s : S^{2n+1} - \{-N\} \longrightarrow \mathrm{SU}(n+1) \text{ telle que } p \circ s = \mathrm{Id}\,.$$
(4) Montrer que l'application
$$\begin{aligned} (S^{2n+1} - \{-N\}) \times \mathrm{SU}(n) &\longrightarrow \mathrm{SU}(n+1) \\ (z, A) &\longmapsto s(z) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
est un homéomorphisme sur son image[11].
(5) Montrer que $\mathrm{SU}(n+1)$ est réunion de deux ouverts U_1 et U_2 dont chacun est homéomorphe au produit du complémentaire d'un point dans S^{2n+1} et de $\mathrm{SU}(n)$ et dont l'intersection est homéomorphe au produit du complémentaire de deux points dans S^{2n+1} et de $\mathrm{SU}(n)$.
(6) En déduire, par récurrence sur n, la simple connexité de $\mathrm{SU}(n)$.

Exercice IV.33 **(Invariance du domaine)**. Montrer que, pour $m \geq 2$, un ouvert de $\mathbf{R}^m$ n'est pas homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}$. Montrer que, pour $m \geq 3$, un ouvert de $\mathbf{R}^m$ n'est pas homéomorphe à un ouvert de $\mathbf{R}^2$.

[10] pour la forme hermitienne...

[11] On a ici une sorte de trivialité locale, comme pour un revêtement, ce que p n'est pas : ses fibres sont homéomorphes à $\mathrm{SU}(n)$, qui n'est pas un espace discret. On a ici une notion plus générale de « fibration ».

CHAPITRE V

REVÊTEMENTS ET GROUPE FONDAMENTAL

Comme les lecteurs s'en doutent peut-être après le calcul du groupe fondamental du cercle (voir le § IV-5), il y a des relations profondes entre revêtements et groupe fondamental. On les étudie dans ce chapitre[(1)].

1. Premières propriétés

Remarquons d'abord, c'est une conséquence des résultats sur les relèvements des chemins et des homotopies (propositions III-5.8 et III-5.10), que la projection d'un revêtement induit un homomorphisme *injectif* au niveau des groupes fondamentaux.

Théorème 1.1. *Soit $p : E \to B$ un revêtement et soit x un point de E. L'homomorphisme*

$$p_\star : \pi_1(E, x) \longrightarrow \pi_1(B, p(x))$$

est injectif.

Démonstration. Soit c un lacet de base x dans E. Supposons que la classe $[c]$ soit dans le noyau de $p_\star$, c'est-à-dire que $p \circ c$ soit homotope au lacet constant $c_{p(x)}$. Considérons le chemin (lacet, en fait) $p \circ c$ et son unique relevé d'origine x... qui ne peut pas manquer d'être c lui-même. Considérons aussi une homotopie de $p \circ c$ au lacet constant c_b ($b = p(x)$). Son relevé est une homotopie du relevé c de $p \circ c$ à celui, c_x, de c_b. Donc c est homotope au lacet constant et la classe $[c]$ est triviale dans $\pi_1(E, x)$. □

Les mêmes arguments donnent aussi un autre résultat utile :

Proposition 1.2. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. On suppose que E est connexe par arcs. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *l'espace E est simplement connexe,*
(2) *deux lacets basés en b dans B sont homotopes si et seulement si, pour tout point $x \in p^{-1}(b)$, leurs relèvements d'origine x ont la même extrémité.*

Démonstration. Supposons d'abord E simplement connexe. Soient c et c' deux lacets de base b et x un point de la fibre $p^{-1}(b)$. Considérons les relevés $\widetilde{c}$ et $\widetilde{c'}$ d'origine x. Si c et c' sont homotopes, en relevant une homotopie, on voit que $\widetilde{c}$ et $\widetilde{c'}$ ont la même extrémité. Inversement, si $\widetilde{c}$ et $\widetilde{c'}$ ont la même extrémité, ces chemins sont homotopes puisque E est simplement connexe (en vertu de la proposition IV-2.4).

Pour l'implication réciproque, considérons un lacet c de base x dans E. C'est le (l'unique) relevé d'origine x du lacet $p \circ c$. D'après l'hypothèse faite, $p \circ c$ est homotope au lacet constant c_b donc c est homotope au lacet constant c_x, donc E est simplement connexe. □

[(1)] Voir aussi les remarques finales de ce cours page 99.

2. Opération du groupe fondamental sur les revêtements

On peut interpréter les résultats de relèvement des chemins et des homotopies (c'est-à-dire les propositions III-5.8 et III-5.10) comme le fait que le groupe fondamental de l'espace de base opère sur les fibres du revêtement. Attention toutefois, c'est une opération *à droite*. Voir la remarque II-3.1.

Théorème 2.1. *Soit $p : E \to B$ un revêtement localement connexe par arcs d'un espace B connexe par arcs. Alors*

(1) *Le groupe fondamental $\pi_1(B, b)$ opère à droite sur la fibre $p^{-1}(b)$.*
(2) *Le stabilisateur de x est le sous-groupe*

$$p_\star \pi_1(E, x) \subset \pi_1(B, b).$$

(3) *Cette opération est transitive si et seulement si E est connexe par arcs.*

Démonstration. L'opération est donnée par l'application

$$p^{-1}(b) \times \pi_1(B, b) \longrightarrow p^{-1}(b)$$

définie en associant, à $x \in p^{-1}(b)$ et $[c] \in \pi_1(B, b)$, l'extrémité $\widetilde{c}(1)$ d'un relevé d'origine x de c (extrémité qui ne dépend que de la classe d'homotopie de c).

À la composée de deux lacets c et c', on associe ainsi l'extrémité du relevé de cc' d'origine x. On relève d'abord c, avec origine x, puis c' avec origine $\widetilde{c}(1) = x \cdot [c]$. On a ainsi

$$x \cdot [cc'] = (x \cdot [c]) \cdot [c']$$

c'est bien une opération à droite.

Le stabilisateur d'un point x est formé des lacets de base b qui se relèvent en des lacets de base x... ou, si l'on préfère, qui sont projections de lacets de base x.

Supposons l'opération transitive et montrons que E est connexe par arcs. Soient u et v deux points de E, construisons un chemin de u à v dans E. On sait que B est connexe par arcs, donc on peut joindre $p(u)$ à b par un chemin c et b à $p(v)$ par un chemin c'. En relevant c et c', on obtient des chemins de u à un point x de la fibre de b et d'un (autre) point y de cette même fibre à v. Grâce à la transitivité de l'opération, il y a un lacet dans B qui se relève en un chemin de x à y. On n'a plus qu'à composer ces trois chemins pour avoir joint u à v.

Supposons réciproquement E connexe par arcs. On peut joindre deux points x et y de la fibre $p^{-1}(b)$ par un chemin γ, et $p \circ \gamma$ est un lacet basé en b tel que $x \cdot [\widetilde{p \circ \gamma}] = y$. Donc l'opération est transitive. □

***Proposition 2.2* (Relèvement des applications)**. *Soient $p : E \to B$ un revêtement connexe, X un espace topologique connexe et localement connexe par arcs et $f : X \to B$ une application continue. Soient enfin x un point de X et y un point de la fibre de $f(x)$. Pour qu'il existe un relèvement $\widetilde{f}$ de f avec $\widetilde{f}(x) = y$, il faut et il suffit que l'on ait*

$$f_\star \pi_1(X, x) \subset p_\star \pi_1(E, y).$$

Le relèvement est alors unique.

Démonstration. La condition est nécessaire : si $p \circ \widetilde{f} = f$, alors $f_\star = p_\star \circ \widetilde{f}_\star$, donc l'image de $f_\star$ est contenue dans celle de $p_\star$.

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Réciproquement, considérons le revêtement tiré en arrière $q : D \to X$ et le point $(x, y) \in D \subset X \times E$. Soit C la composante connexe de (x, y) dans D. C'est un revêtement connexe par arcs[(2)] de X. Soit c un lacet de base x dans X. Comme $f_\star[c] \in p_\star\pi_1(E, y)$, il existe un lacet γ basé en y dans E tel que $f \circ c$ soit homotope à $p \circ \gamma$ par une homotopie H à valeurs dans B. Le relevé $\widetilde{H}$ de H à E tel que $\widetilde{H}(0, 0) = y$ satisfait

$$t \mapsto \widetilde{H}(t, 0) = \widetilde{f \circ c} \text{ et } t \mapsto \widetilde{H}(t, 1) = \widetilde{p \circ \gamma} = \gamma$$

de sorte que $\widetilde{H}(1, 1) = \gamma(1) = y$. Ainsi $\widetilde{f \circ c}$ est un lacet γ' qui satisfait $f \circ c = p \circ \gamma'$. Mais alors

$$t \longmapsto (c(t), \gamma'(t))$$

définit un lacet dans $X \times E$, basé en (x, y), qui est en fait à valeurs dans D et donc dans C. On a donc montré que

$$q_\star : \pi_1(C, (x, y)) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

est surjective. Elle est injective comme tous les homomorphismes induits par des revêtements, c'est donc un isomorphisme.

Enfin, les fibres de $C \to X$ sont en bijection avec l'ensemble quotient[(3)] $q_\star\pi_1(C, (x, y))\backslash\pi_1(X, x)$, donc ont un seul élément. Donc q est un homéomorphisme de C sur X. La composition

$$\widetilde{f} = F \circ (q\,|_C)^{-1} : X \longrightarrow C \longrightarrow E$$

est le relèvement cherché. On a l'unicité comme d'habitude. □

Corollaire 2.3. *Tout revêtement d'un espace localement connexe par arcs et* simplement connexe *est trivial.*

Démonstration. Soit $p : E \to B$ un revêtement. Si B est simplement connexe, alors toutes les égalités de sous-groupes de $\pi_1(B, b)$ sont vraies. En particulier, pour chaque point x de la fibre de $b \in B$, l'application continue $\mathrm{Id} : B \to B$ a un relèvement s telle que $s(b) = x$. L'application s est une section *globale* de p et elle définit un homéomorphisme de B sur la composante connexe de x dans E. Donc E est réunion de composantes connexes en restriction auxquelles p est un homéomorphisme. □

Théorème 2.4. *Soit $p : E \to B$ un revêtement connexe par arcs et localement connexe par arcs. Il est galoisien si et seulement si pour tous b dans B et x dans $p^{-1}(b)$, $p_\star\pi_1(E, x)$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(B, b)$. Le groupe* $\mathrm{Aut}(E)$ *est alors isomorphe au groupe quotient $\pi_1(B, b)/p_\star\pi_1(E, x)$.*

Corollaire 2.5. *Si E est simplement connexe, le revêtement $p : E \to B$ est galoisien et son groupe d'automorphismes est isomorphe à $\pi_1(B, b)$.* □

Démonstration du théorème 2.4. Supposons d'abord le revêtement $p : E \to B$ galoisien et montrons que le sous-groupe est distingué. Soit γ un lacet de base x dans E. On veut montrer que, pour tout lacet c de base b dans B,

$$[c]^{-1}[p \circ \gamma][c] = [p \circ \gamma'] \text{ pour un certain lacet } \gamma'.$$

Soit $\widetilde{c}$ le relevé de c d'origine x et soit y son extrémité. Comme le revêtement p est galoisien, y est l'image de x par un automorphisme h. On a

$$[c]^{-1}[p \circ \gamma][c] = [\overline{c}(p \circ \gamma)c],$$

$\overline{c}(p \circ \gamma)c$ se relève en $\widetilde{\overline{c}}\gamma\widetilde{c}$, un lacet basé en $y = h(x)$. Donc

$$[\overline{c}(p \circ \gamma)c] \in p_\star\pi_1(E, y) = p_\star\pi_1(E, h(x)) = p_\star h_\star\pi_1(E, x) = (p \circ h)_\star\pi_1(E, x) = p_\star\pi_1(E, x).$$

(2) C'est ici que l'hypothèse de locale connexité par arcs de X est utilisée.

(3) Le quotient de l'espace E par l'opération à droite du groupe G est, bien sûr, noté $G\backslash E$.

Réciproquement, supposons que $p_\star\pi_1(E,x)$ soit un sous-groupe distingué de $\pi_1(B,b)$. On commence par construire un homomorphisme de groupes

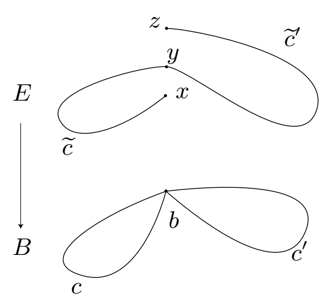
$$h : \pi_1(B,b) \longrightarrow \mathrm{Aut}(E).$$

Soit c un lacet de base b dans B et soit $\widetilde{c}$ son relevé d'origine x. Soit y son extrémité. Le calcul précédent donne, puisque le sous-groupe $p_\star\pi_1(E,x)$ est distingué, que $p_\star\pi_1(E,x) = p_\star\pi_1(E,y)$. On veut montrer qu'il existe un automorphisme $h_c = h([c])$ qui envoie x sur y. Autrement dit, on cherche un relèvement de p envoyant x sur y.

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "p"] \\
E \arrow[ur, dotted, "h_c"] \arrow[r, "p"'] & B
\end{tikzcd}$$

Il suffit d'appliquer la proposition 2.2 avec $X = E$ et $f = p$. Comme $p_\star\pi_1(E,x) = p_\star\pi_1(E,y)$, $h([c])$ ne dépend pas de x mais seulement de $[c]$. On a donc, avec h, une application

$$h : \pi_1(B,b) \longrightarrow \mathrm{Aut}(E).$$



Soit c un lacet basé en b dans B. Appelons, pour cette démonstration, $\widetilde{c}_x$ son unique relevé d'origine $x \in p^{-1}(b)$ dans E. Ainsi, par définition de h, on a

$$h([c])(x) = \widetilde{c}_x(1).$$

De plus, pour tout automorphisme g du revêtement, on a

$$g \circ \widetilde{c}_x = \widetilde{c}_{g(x)}$$

puisque $g \circ \widetilde{c}_x$ est un relevé de c et que

$$(g \circ \widetilde{c}_x)(1) = g(\widetilde{c}_x(1)) = g(x).$$

Montrons que $h : \pi_1(B,b) \to \mathrm{Aut}(E)$ est un homomorphisme de groupes en évaluant $h([cc'])$. Il s'agit donc de relever le lacet cc' à partir de x et de prendre son extrémité. On relève donc c de x à $h([c])(x) = y$ puis c' de y à $h([c'])(y) = z$, en d'autres termes,

$$\widetilde{c}_x(1) = x, \qquad \widetilde{c'}_y(1) = z, \qquad \widetilde{cc'}_x(1) = z.$$

L'automorphisme $h([cc'])$ envoie tout point x de la fibre de b sur l'extrémité z de $\widetilde{cc'}_x$. Voyons ce que $h([c]) \circ h([c'])$ fait subir au même point x. On a bien

$$h([c]) \circ h([c'])(x) = h([c])(\widetilde{c'}_x(1)) = \widetilde{c'}_{h([c])(x)}(1) = \widetilde{c'}_y(1) = z.$$

Le noyau de h est formé des classes de lacets c telles que $h([c]) = \mathrm{Id}$, c'est-à-dire telles que $h([c])(x) = x$ pour tout x dans $p^{-1}(b)$. C'est le cas si et seulement si c se relève en un lacet dans E, c'est-à-dire si et seulement si $[c] \in p_\star\pi_1(E,x)$. $\square$

3. Revêtements universels, classification des revêtements

La classification des revêtements est une sorte de correspondance de Galois entre revêtements connexes par arcs de B et sous-groupes de $\pi_1(B,b)$, suivant le théorème 1.1.

Pour montrer que cette correspondance est bijective, il est nécessaire de s'assurer qu'elle est surjective, soit que tous les sous-groupes de $\pi_1(B,b)$ apparaissent effectivement comme images de groupes fondamentaux revêtant B. Et il faut, d'abord, savoir réaliser le groupe trivial. C'est ce que fait le revêtement « universel ».

Un revêtement $p : E \to B$ est *universel* s'il est galoisien (en particulier connexe par arcs) et si, pour tout revêtement connexe $q : D \to B$, il existe un homomorphisme de revêtements h au dessus de B :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dotted, "h"] \arrow[dr, "p"'] & D \arrow[d, "q"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Remarquons d'abord que, dans ces conditions, h aussi est un revêtement — une des justifications possibles de la terminologie « revêtement universel ». On a précisément :

Proposition 3.1. *Soient E, D et B trois espaces connexes et localement connexes par arcs et soient p, q et h trois applications continues*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dotted, "h"] \arrow[dr, "p"'] & D \arrow[d, "q"] \\ & B \end{tikzcd}$$

telles que $q \circ h = p$. Si p et q sont des revêtements, alors h est un revêtement.

Démonstration. Fixons des points $x \in E$, $y = h(x) \in D$ et $b = p(x) = q(y) \in B$.

Montrons d'abord que h est surjective. Soit z un point de D. On veut montrer que z est atteint par h. Comme D est connexe par arcs, il existe un chemin c d'origine y et d'extrémité z dans D. Le chemin $q \circ c$ a pour origine b dans B, on le relève en un chemin $\widetilde{q \circ c}$ d'origine x dans E. Mais alors $h \circ (\widetilde{q \circ c})$ est un relevé de $q \circ c$ d'origine y dans D. Par unicité des relevés d'origine y, on a $h \circ (\widetilde{q \circ c}) = c$, en particulier,

$$z = c(1) = h\,(\widetilde{q \circ c}(1))$$

et donc h est surjective.

Soit toujours $y \in D$. Montrons que y possède un voisinage trivialisant h. Comme p et q sont des revêtements, $b = q(y)$ possède un voisinage V, qu'on peut supposer connexe par arcs, et qui trivialise p et q. Soit U un voisinage de y tel que $q\,|_U$ soit un homéomorphisme de U sur V. On montre que U trivialise h. Comme V trivialise p, on a

$$p^{-1}(V) = \coprod U_i$$

où les U_i sont des ouverts connexes, chacun homéomorphe, par la restriction de p, à V. L'image $h(U_i)$ est contenue dans $q^{-1}(V)$ et c'est un des ouverts, composantes de $q^{-1}(V)$. Ainsi

$$h^{-1}(U) = \coprod_{\{i \mid h(U_i) \subset U\}} U_i$$

(l'ensemble d'indices n'est pas vide, c'est ici qu'on utilise la surjectivité de h montrée précédemment). De plus, $h\,|_{U_i}$ est un homéomorphisme de U_i sur U, puisque c'est $q^{-1} \circ p$... sans mentionner explicitement les restrictions et en contemplant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} U_i \arrow[r, dotted, "h"] \arrow[dr, "p"'] & U \arrow[d, "q"] \\ & V \end{tikzcd}$$

... le tout montrant la trivialité locale de h, qui ne peut donc s'empêcher d'être un revêtement. □

Remarquons ensuite que, s'il existe un revêtement universel, il est unique à isomorphisme près.

Démonstration. En effet, si $p : E \to B$ et $p' : E' \to B$ sont des revêtements universels, le fait que p en soit un fournit un homomorphisme de revêtements $h : E \to E'$ et de même, le fait que p' soit universel fournit $h' : E' \to E$. Mais alors $h \circ h'$ (et de même $h' \circ h$) est un endomorphisme d'un revêtement galoisien donc un automorphisme, comme le dit la dernière propriété du § III-6). On en déduit que p et p' sont isomorphes. □

Il est assez facile de déterminer si un revêtement donné est universel, grâce à la proposition suivante.

Proposition 3.2. *Si $p : E \to B$ est un revêtement localement connexe par arcs et si E est simplement connexe, alors p est universel.*

Démonstration. Soit $p : E \to B$ un revêtement. On suppose que E est simplement connexe. Le sous-groupe $p_\star\pi_1(E, x)$ ne peut donc pas s'empêcher d'être trivial. Considérons un revêtement $q : D \to B$. Il existe donc, grâce à la proposition 2.2, un relèvement h de p :

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[d, "q"] \\ E \arrow[ur, dotted, "h"] \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire un morphisme de revêtements h comme souhaité. □

Exemples 3.3. Les revêtements $S^n \to \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ (pour $n \geq 2$), $\mathbf{R} \to S^1$, $\mathbf{C} \to \mathbf{C} - \{0\}$ sont des revêtements universels.

Pour construire un revêtement universel d'un espace B, il suffit donc d'en construire un revêtement simplement connexe. Supposons qu'un tel revêtement de B existe. Considérons un point $b \in B$, un voisinage U de b trivialisant le revêtement et une section s de p au dessus de U. Si $i : U \to B$ désigne l'inclusion, on a $i = p \circ s$, donc au niveau des groupes fondamentaux, $i_\star = p_\star \circ s_\star$ est nulle.

On dit qu'un espace B est *semi-localement simplement connexe* si tout point b de B possède un voisinage U tel que tout lacet de base b dans U soit homotope dans B au lacet constant c_b. Notons qu'il faut se fatiguer un peu pour construire des espaces qui n'aient pas cette propriété. On vient de voir que cette propriété est vérifiée quand B possède un revêtement simplement connexe. On a donc démontré une des deux assertions de l'énoncé suivant.

Théorème 3.4. *Soit B un espace connexe localement connexe par arcs. Pour qu'il existe un revêtement simplement connexe de B, il faut et il suffit que B soit semi-localement simplement connexe.*

Pour démontrer la réciproque, on construit explicitement, à partir de B, un espace E qui est un revêtement simplement connexe de B. La construction est assez technique, je la reporte au § 4.

On suppose maintenant que B est un espace connexe localement connexe par arcs qui possède un revêtement universel. Celui-ci étant construit, on peut en déduire des revêtements de B dont les espaces totaux ont pour groupe fondamental n'importe quel sous-groupe de $\pi_1(B, b)$.

Proposition 3.5. *Soit B un espace connexe localement connexe par arcs possédant un revêtement universel et soit $H \subset \pi_1(B,b)$ un sous-groupe. Il existe un revêtement connexe*

$$q_H : E_H \longrightarrow B$$

et un élément $x_H \in (q_H)^{-1}(b)$ tels que

$$(q_H)_\star \pi_1(E_H, x_H) = H.$$

Démonstration. Soit $p : E \to B$ un revêtement universel. Le sous-groupe H de $\pi_1(B,b)$ opère sur E (par le corollaire 2.5). Posons $E_H = E/H$. La projection p passe au quotient en un revêtement $q_H : E_H \to B$ en vertu du lemme 3.6 ci-dessous.

Soit γ un lacet de base b dans B et soit $\widetilde{\gamma}$ un relèvement de γ dans le revêtement universel, d'origine $x \in E$. Soit x_H l'image de x. La classe de γ est dans l'image de $(q_H)_\star$ dans $\pi_1(B,b)$ si et seulement si son relevé d'origine x_H dans E_H est un lacet, c'est-à-dire si et seulement si $\widetilde{\gamma}(1) = h \cdot x$ pour un certain $h \in H$. Ainsi

$$(q_H)_\star \pi_1(E_H, x_H) = H.$$

□

Il reste à énoncer et à démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.6. *Soient E, D et B trois espaces connexes et localement connexes par arcs et soient p, q et h trois applications continues*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dotted, "h"] \arrow[dr, "p"'] & D \arrow[d, "q"] \\ & B \end{tikzcd}$$

telles que $q \circ h = p$. Si p et h sont des revêtements, alors q est un revêtement.

Démonstration. Soit b un point de B et soit V un voisinage de b trivialisant le revêtement p. On peut supposer (et donc on suppose) que V est connexe par arcs. On montre que V trivialise aussi q. On considère $q^{-1}(V)$, qu'on écrit comme réunion de composantes connexes

$$q^{-1}(V) = \coprod_j V_j$$

et on veut montrer que la restriction $q\,|_{V_j}$ est un homéomorphisme de V_j sur V.

Comme p est un revêtement, on peut écrire

$$p^{-1}(V) = \coprod_{i \in I} U_i$$

où chacune des composantes connexes U_i est homéomorphe (par p) à V. On a $h(U_i) \subset q^{-1}(V)$, comme U_i est connexe, $h(U_i)$ est un des V_j et donc

$$h^{-1}(V_j) = \coprod_{i \in I'} U_i$$

pour un certain sous-ensemble d'indices. Comme h est un revêtement, c'en est un au-dessus du sous-espace V_j de D et c'en est encore un en restriction à chaque composante connexe U_i de $h^{-1}(V_j)$. L'application

$$h\,|_{U_i} : U_i \longrightarrow V_j$$

est donc surjective (puisque c'est un revêtement). Elle est continue et ouverte. Elle est injective : si $h(x) = h(x')$, x et x' sont dans la même fibre de p, mais U_i contient au plus un point de chaque fibre. Donc $h\,|_{U_i}$ est un homéomorphisme sur son image V_j, ce que nous voulions démontrer. □

Nous savons donc que la « correspondance de Galois » évoquée au début de ce paragraphe est surjective. Montrons maintenant qu'elle est injective.

Proposition 3.7. *Soit B un espace connexe et localement connexe par arcs. Soit $b \in B$. Deux revêtements $q_1 : E_1 \to B$ et $q_2 : E_2 \to B$ sont isomorphes par $f : E_1 \to E_2$ avec $f(x_1) = x_2$ pour $x_1 \in q_1^{-1}(b)$, $x_2 \in q_2^{-1}(b)$ si et seulement si*

$$(q_1)_\star \pi_1(E_1, x_1) = (q_2)_\star \pi_1(E_2, x_2) \subset \pi_1(B, b).$$

Démonstration. Si f est un tel isomorphisme, c'est en particulier un homéomorphisme, donc $f_\star : \pi_1(E_1, x_1) \to \pi_1(E_2, x_2)$ est un isomorphisme. de plus, on a $q_2 \circ f = q_1$ donc

$$(q_1)_\star \pi_1(E_1, x_1) = (q_2)_\star \pi_1(E_2, x_2).$$

Réciproquement, supposons les deux sous-groupes égaux. Grâce à la proposition 2.2, on peut relever q_1 en une unique application continue $\widetilde{q}_1 : E_1 \to E_2$ avec $q_2 \circ \widetilde{q}_1 = q_1$ et $\widetilde{q}_1(x_1) = x_2$. De même, il existe une unique application continue $\widetilde{q}_2 : E_2 \to E_1$ avec $q_1 \circ \widetilde{q}_2 = q_2$ et $\widetilde{q}_2(x_2) = x_1$.

$$\begin{tikzcd} & E_2 \arrow[d, "q_2"] \\ E_1 \arrow[ur, dotted, "\widetilde{q}_1"] \arrow[r, "q_1"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & E_1 \arrow[d, "q_2"] \\ E_2 \arrow[ur, dotted, "\widetilde{q}_2"] \arrow[r, "q_2"'] & B \end{tikzcd}$$

Considérons maintenant $\widetilde{q}_2 \circ \widetilde{q}_1 : E_1 \to E_1$. C'est un relèvement de l'identité de B avec $\widetilde{q}_2 \circ \widetilde{q}_1(x_1) = x_1$, donc $\widetilde{q}_2 \circ \widetilde{q}_1 = \mathrm{Id}_{E_1}$ et de même $\widetilde{q}_1 \circ \widetilde{q}_2 = \mathrm{Id}_{E_2}$. On a donc bien un (des) isomorphisme (s inverse l'un de l'autre). □

On a ainsi démontré :

Théorème 3.8. *Soient B un espace connexe localement connexe par arcs possédant un revêtement universel et b un point de B. L'application qui, à un revêtement connexe par arcs $p : E \to B$ et à un point x de $p^{-1}(b)$, associe le sous-groupe $p_\star\pi_1(E, x)$ de $\pi_1(B, b)$ est une bijection de l'ensemble des revêtements connexes par arcs (avec point-base) de B sur l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(B, b)$.* □

Changer de point-base dans $p^{-1}(b)$ revient à remplacer le sous-groupe par un de ses conjugués. On a, précisément :

Proposition 3.9. *Soit B un espace possédant un revêtement universel et b un point de B. L'application qui, à un revêtement connexe par arcs $p : E \to B$, associe la classe de conjugaison du sous-groupe $p_\star\pi_1(E, x)$ de $\pi_1(B, b)$ (pour $x \in p^{-1}(b)$) est une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphisme des revêtements connexes de B sur l'ensemble des classes de conjugaison des sous-groupes de $\pi_1(B, b)$.*

Démonstration. Soit $p : E \to B$ un revêtement connexe par arcs. Soient x, x' deux points de $p^{-1}(b)$. Soit c un chemin de x à x' dans E. Alors $p \circ c$ est un lacet basé en b dans B. Appelons

$$H = p_\star\pi_1(E, x), \quad H' = p_\star\pi_1(E, x').$$

Si γ est un lacet basé en x, $\overline{p \circ c} \cdot \gamma \cdot p \circ c$ est un lacet basé en x', donc on a

$$[p \circ c]^{-1} H [p \circ c] \subset H'$$

et de même

$$[p \circ c] H' [p \circ c]^{-1} \subset H$$

d'où l'on déduit que les sous-groupes H et H' sont conjugués.

Réciproquement, si H' est un conjugué de $p_\star\pi_1(E, x)$, $H' = g^{-1} p_\star\pi_1(E, x) g$ pour g la classe d'un lacet γ basé en b dans B, le relèvement $\widetilde{\gamma}$ d'origine x a pour extrémité un point x' tel que $H' = p_\star(E, x')$. □

Précisons le cas des revêtements galoisiens :

Théorème 3.10. *Soit $p : E \to B$ un revêtement simplement connexe. Le groupe des automorphismes $G = \mathrm{Aut}(E)$ s'identifie au groupe fondamental $\pi_1(B, b)$. Soient H et K deux sous-groupes de G.*

(1) *Pour que $q_H : E/H \to B$ et $q_K : E/K \to B$ soient des revêtements isomorphes, il faut et il suffit que H et K soient conjugués dans G.*
(2) *Pour que $q_H : E/H \to B$ soit un revêtement galoisien, il faut et il suffit que H soit distingué dans G. Le groupe des automorphismes de q_H est alors isomorphe au groupe quotient G/H.*

□

***Exemple 3.11* (Classification des revêtements connexes de S^1).** Le revêtement exponentiel $\mathbf{R} \to S^1$ est un revêtement simplement connexe. son groupe d'automorphismes est isomorphe à $\mathbf{Z}$ opérant par translations $t \mapsto t + k$. Ce groupe est bien entendu isomorphe au groupe fondamental du cercle S^1. Il est abélien, les classes de conjugaison sont réduites à un élément et on n'a pas à se préoccuper des points-bases. Les revêtements sont déterminés par les sous-groupes de $\mathbf{Z}$, c'est-à-dire les $H = n\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$. Les revêtements connexes de S^1 s'obtiennent par

$$\begin{tikzcd} \mathbf{R} \arrow[rr] \arrow[dr, "\exp"'] & & \mathbf{R}/H \arrow[dl, "\text{degré } n"] \\ & S^1 & \end{tikzcd}$$

— ce revêtement étant isomorphe au revêtement

$$\begin{aligned} S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^n. \end{aligned}$$

Deux revêtements connexes sont isomorphes si et seulement si ils correspondent au même sous-groupe, c'est-à-dire si et seulement si ils ont le même degré.

La classification des revêtements connexes de $\mathbf{C} - \{0\}$ est complètement analogue.

Logarithme, racine n-ième. Comme application de la classification dans ces exemples, répondons à la question posée à la fin du chapitre I.

Proposition 3.12. *Pour qu'il existe une détermination du logarithme sur un ouvert U de $\mathbf{C}$, il faut et il suffit que tout lacet de U soit homotope au lacet constant dans $\mathbf{C} - \{0\}$.*

Démonstration. Soit U un ouvert vérifiant l'hypothèse. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{C} \arrow[d] \\ U \arrow[r] & \mathbf{C} - \{0\} \end{tikzcd}$$

où la flèche verticale est l'exponentielle et la flèche horizontale l'inclusion. D'après la proposition 2.2, cette inclusion se relève, on a donc une section continue de l'exponentielle au-dessus de U, en d'autres termes une détermination continue du logarithme.

Réciproquement, supposons que U n'ait pas la propriété. Il existe alors un lacet γ dans U qui n'est pas homotope, dans $\mathbf{C} - \{0\}$, au lacet constant. On a alors

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z} \neq 0$$

(voir au besoin l'exercice IV.16), donc la fonction $z \mapsto \frac{1}{z}$ n'a pas de primitive holomorphe au voisinage de l'image de γ, de sorte qu'il n'y a pas de détermination du logarithme sur l'ouvert U. □

On a de même :

Proposition 3.13. *Pour qu'il existe une détermination de la racine n-ième sur un ouvert U de $\mathbf{C}$, il faut et il suffit que tout lacet de U soit homotope au lacet constant dans $\mathbf{C} - \{0\}$.*

Démonstration. Sur les ouverts possédant la propriété, on a une détermination de la racine n-ième puisque le revêtement $z \mapsto z^n$ est trivialisable (ou parce qu'on a une détermination du logarithme).

Réciproquement, considérons un lacet γ contenu dans un ouvert U et dont la classe d'homotopie engendre le groupe fondamental de $\mathbf{C} - \{0\}$. Il définit une application

$$\overline{\gamma} : S^1 \longrightarrow \mathbf{C} - \{0\}\,.$$

Le revêtement tiré en arrière (toujours de $z \mapsto z^n$) est un revêtement $E \to S^1$ à n feuillets. Nous voulons montrer qu'il est connexe (il n'aura donc pas de section globale).

Soit $x \in E$ et soit C la composante connexe par arcs de x dans E. On considère le revêtement $C \to S^1$ et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi_1(C,x) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z} \arrow[d, "n"] \\ \mathbf{Z} \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] & \mathbf{Z} \end{tikzcd}$$

dont les flèches verticales sont induites par des revêtements et sont donc injectives. Celle de gauche est d'indice k, où k, le nombre de feuillets de $C \to S^1$, est un entier plus petit que n. En passant par l'autre chemin, le groupe fondamental de C est envoyé sur un sous-groupe d'indice un multiple de n. Pour que ces deux sous-groupes coïncident, il faut que $k = n$, en d'autres termes que $C = E$, donc que E soit connexe. □

4. Construction d'un revêtement simplement connexe

Supposons d'abord le problème résolu, c'est-à-dire qu'on ait un revêtement $p : E \to B$ avec E simplement connexe. Fixons un point x dans E et son image $a = p(x)$ dans B. Comme E est connexe par arcs, on peut joindre x à n'importe quel autre point y de E. Comme E est simplement connexe, la classe d'homotopie d'un chemin de x à y est bien définie. Considérons maintenant l'application qui, à $y \in E$, associe la classe d'homotopie du chemin $p_\star\alpha$, où α désigne la classe d'homotopie d'un chemin de x à y. À cause de la possibilité de relever les chemins (proposition 5.8), cette application est une bijection de E dans l'ensemble des classes d'homotopie des chemins d'origine a dans B.

Utilisons maintenant cette remarque pour *construire* un tel revêtement.

Soit donc B un espace connexe par arcs et semi-localement simplement connexe. Définissons un ensemble

$$E = \{\text{classes d'homotopie (à extrémités fixées) des chemins d'origine } a \text{ dans } B\}$$

et une application

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow B \\ \alpha &\longmapsto \alpha(1). \end{aligned}$$

Remarque 4.1. Pour ne pas alourdir les notations, je vais souvent utiliser la même lettre pour désigner la classe d'homotopie d'un chemin et ce chemin lui-même. Il ne devrait en résulter aucune ambiguïté.

Il nous reste à démontrer que E peut être muni d'une topologie pour laquelle p est un revêtement et qu'il est simplement connexe.

Soit $\alpha \in E$ et soit U un ouvert basique[4] de B. On définit une partie de E :

$$U_\alpha = \{\beta \in E \mid \text{ il existe un chemin } \alpha' \text{ dans } U \text{ avec } \alpha\alpha' = \beta\}$$

Pour montrer que les U_α forment une base d'ouverts pour une topologie sur E, il faut vérifier que

$$\forall\, \gamma \in U_\alpha \cap V_\beta, \text{ il existe un ouvert basique } W \text{ tel que } W_\gamma \subset U_\alpha \cap V_\beta.$$

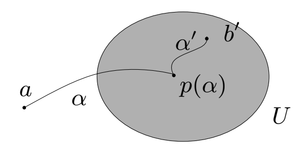
Mais on peut prendre pour W n'importe quel ouvert basique tel que $p(\gamma) \in W \subset U \cap V$.

Lemme 4.2. *Soit $\alpha \in E$ et soit U un voisinage ouvert basique de $p(\alpha)$. Alors la restriction*

$$p\,|_{U_\alpha} : U_\alpha \longrightarrow U$$

est bijective.

Démonstration.

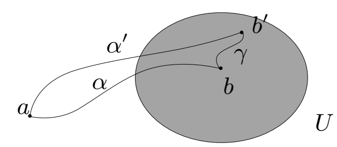


Pour tout point b' de U, on peut trouver un chemin α' de $p(\alpha)$ à b' (voir la figure ci-contre). On peut donc écrire $b' = p(\alpha\alpha')$ et celui-ci est un point de $p(U_\alpha)$, ce dont on déduit que la restriction de p est surjective.

De plus, la classe d'homotopie du chemin $\alpha\alpha'$ ne dépend pas du choix de α', donc cette restriction est injective. □

Lemme 4.3. *Soit U un ouvert basique de B et soit b un point de U. Alors $p^{-1}(U)$ est la réunion disjointe des U_α pour α chemin joignant a à b.*

Démonstration.



L'ensemble $p^{-1}(U)$ est formé des classes des chemins joignant a à un point de U. Si $b' \in U$, soit γ un chemin joignant b à b' (figure ci-contre). Alors, si α' est un chemin joignant a à b', il est homotope à un $\alpha\gamma$ pour un certain chemin α joignant a à b : il suffit de prendre $\alpha = \alpha'\overline{\gamma}$. Donc $p^{-1}(U)$ est bien la réunion annoncée. De plus, c'est une réunion disjointe :

$$U_\alpha \cap U_\beta = \{\gamma \in E \mid \exists\, \alpha', \beta' \text{ chemins dans } U \text{ tels que } \alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\}.$$

Mais α' et β' sont homotopes dans B, donc l'égalité $\alpha\alpha' = \beta\beta'$ implique que α et β sont homotopes. □

Grâce à ces deux lemmes, on va démontrer le résultat voulu.

Théorème 4.4. *L'application p est un revêtement. L'espace total E est connexe par arcs et simplement connexe.*

Démonstration. Du lemme 4.3, on déduit que p est continue : pour tout ouvert basique U, $p^{-1}(U)$ est une réunion d'ouverts donc un ouvert. Grâce au lemme 4.2, $p\,|_{U_\alpha}$ est donc une bijection continue de U_α sur U.

Mais c'est aussi une application ouverte. En effet, tout ouvert contenu dans U_α est une réunion d'ouverts de la forme V_β (pour certains ouverts basiques V contenus dans U). Mais, d'après le lemme 4.2, $p(V_\beta) = V$ et l'image par l'application bijective $p\,|_{U_\alpha}$ d'une réunion est la réunion des images, donc un ouvert.

Donc $p\,|_{U_\alpha}$ est un homéomorphisme. Comme la réunion obtenue dans le lemme 4.3 est disjointe, on en déduit que $p\,|_{p^{-1}(U)}$ est un revêtement trivial. Donc p est un revêtement.

Montrons encore que E est connexe par arcs. Appelons comme toujours c_a la classe du lacet constant égal à a. Soit α un élément de E. Posons, pour tout $t \in [0,1]$, $\alpha_s(t) = \alpha(st)$. la classe d'homotopie de

---

[4] On appelle ouvert *basique* de B tout ouvert U telle que l'inclusion de U dans B induise un homomorphisme nul au niveau des groupes fondamentaux, un des ces ouverts dont la simple connexité semi-locale assure l'existence.

α_s est bien définie, on a $\alpha_0 = c_a$ et $\alpha_1 = \alpha$, donc on a défini un chemin joignant le point c_a à α... dont il reste à vérifier qu'il est continu. Montrer que l'application

$$\begin{aligned}[0,1] &\longrightarrow E\\ s &\longmapsto \alpha_s\end{aligned}$$

est continue, c'est montrer que

$$\forall\, s_0 \in [0,1], \forall\, U \text{ voisinage basique de } \alpha_{s_0}, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } |s - s_0| < \delta \Rightarrow \alpha_s \in U_{\alpha_{s_0}}.$$

Mais l'application $\alpha : [0,1] \to B$ est continue, on sait donc que

$$\forall\, U \text{ voisinage de } \alpha_{s_0}, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } |s - s_0| < \delta \Rightarrow \alpha_s \in U.$$

On fixe donc un ouvert basique U, la continuité de α donne un $\delta > 0$ qui montre la continuité voulue puisque

$$\alpha(s) \in U \Leftrightarrow \alpha_s \in U_{\alpha_{s_0}}.$$

Montrons enfin que E est simplement connexe. Pour ce faire, on utilise la caractérisation 1.2 des revêtements simplement connexes. Soit α un chemin d'origine a dans B. On le relève dans E en un unique chemin $\widetilde{c}$ d'origine c_a. L'extrémité de ce chemin est la classe du lacet α... autant dire qu'elle ne dépend que de la classe d'homotopie de α. Donc E est simplement connexe. □

Exercices

Exercice * ***V.1*** **(Revêtements d'une couronne — examen, 2002)**. Soit a un nombre réel, $a > 0$. Quelle est l'image de la bande $0 \leq x \leq a$ par l'application exponentielle $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$? Déterminer le groupe fondamental de la couronne

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

Déterminer le revêtement universel de A. Quel est son groupe d'automorphismes ? Décrire tous les revêtements connexes de A.

Exercice * ***V.2***. Décrire tous les revêtements connexes du tore T^2.

Exercice * ***V.3***. Quel est le groupe fondamental de l'espace projectif réel $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$? Quel est le groupe fondamental de $\mathrm{O}^+(3)$? celui de $\mathrm{O}^+(4)$ (on pourra se souvenir de l'exercice II.37) ?

Exercice * ***V.4***. Décrire le revêtement universel de la bouteille de Klein (exercice III.6). Déterminer le groupe fondamental de la bouteille de Klein. La bouteille de Klein est-elle homéomorphe à un tore ?

Exercice * ***V.5*** **(Une façon tortueuse de montrer que le groupe fondamental du huit n'est pas abélien)**
... Le faire en utilisant les exercices IV.12 et V.4. Voir, plus sérieusement, l'exercice (subséquent) VI.1.

Exercice * ***V.6***. Montrer que le tore $S^1 \times S^1$ ne se rétracte pas sur le « huit » (voir l'exercice IV.9 et utiliser l'exercice V.5).

Exercice * ***V.7***. Montrer qu'il n'existe pas de rétraction par déformation de la bande de Möbius sur son bord.

Exercice * ***V.8*** **(Espaces lenticulaires — examen, 2002)**. On considère la sphère unité

$$S^{2n-1} = \left\{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n \mid \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 1\right\}$$

dans $\mathbf{C}^n$. On la munit d'une opération du cercle S^1 des nombres complexes de module 1 par multiplication :

$$z \cdot (z_1, \ldots, z_n) = (zz_1, \ldots, zz_n).$$

Rappeler pourquoi cette opération est propre et montrer qu'elle est libre. En considérant le sous-groupe $C_k \subset S^1$ des racines k-ièmes de l'unité, construire un espace topologique compact et connexe par arcs dont le groupe fondamental soit isomorphe au groupe cyclique $\mathbf{Z}/k\mathbf{Z}$.

Soit G un groupe abélien de type fini. Construire un espace compact et connexe par arcs dont le groupe fondamental soit isomorphe à G.

Exercice** *V.9. On a vu que $\mathrm{SU}(n)$ est simplement connexe (exercice IV.32). Quel est le revêtement universel de $\mathrm{U}(n)$?[5] Quel est son groupe fondamental ? Que peut-on dire de l'application $\mathrm{dét}_\star$ induite par

$$\mathrm{dét} : \mathrm{U}(n) \longrightarrow S^1?$$

***Exercice** *V.10* (Le théorème de Borsuk-Ulam)**. Démontrer qu'il n'existe aucune application continue f de S^1 dans S^0 telle que $f(-z) = -f(z)$ pour tout z.

On se propose de démontrer que, de même, il n'existe pas d'application continue f de S^2 dans S^1 telle que $f(-u) = -f(u)$ pour tout u. Soit donc $f : S^2 \to S^1$ une application continue telle que $f(-u) = -f(u)$ pour tout u. Montrer que f définit une application continue

$$g : \mathbf{P}^2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$$

telle que $p_1 \circ f = g \circ p_2$ (en appelant p_n la projection de S^n sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$). Que peut-on dire de l'homomorphisme $g_\star$ induit par g sur les groupes fondamentaux ?

Soit u un point de la sphère S^2 et soit α un chemin d'origine u et d'extrémité $-u$ dans S^2. Montrer que $p_2 \circ \alpha$ représente un élément non trivial de $\pi_1(\mathbf{P}^2(\mathbf{R}))$ et de même que $p_1 \circ f \circ \alpha$ représente un élément non trivial de $\pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbf{R}))$.

Conclure.

Applications. Soit $f : S^2 \to \mathbf{R}^2$ une application continue telle que $f(-u) = -f(u)$ pour tout u. Montrer que f s'annule en au moins un point de S^2.

Soit $f : S^2 \to \mathbf{R}^2$ une application continue. Montrer qu'il existe au moins un point u tel que $f(u) = f(-u)$. Existe-t-il une injection continue de S^2 dans $\mathbf{R}^2$?

On suppose que F_1, F_2 et F_3 sont trois fermés non vides sur la sphère dont la réunion est la sphère tout entière. Montrer qu'au moins l'un des trois contient deux points antipodaux[6].

***Exercice** *V.11* (Plus grand revêtement abélien)**. Soit B un espace connexe possédant un revêtement universel. Montrer qu'il existe un revêtement connexe $\widetilde{B} \to B$ solution du problème universel

$$\begin{tikzcd} \widetilde{B} \arrow[dr, dotted] \arrow[dd, dotted] & \\ & E \arrow[dl] \\ B & \end{tikzcd}$$

dans lequel toutes les flèches sont des revêtements abéliens.

Exercice** *V.12. Soit G un groupe et soit $[G, G]$ le sous-groupe engendré par ses commutateurs. Montrer que $[G, G]$ est distingué, que le quotient $G/[G, G]$ est abélien et, dans un sens que l'on précisera[7], que c'est le plus grand quotient abélien de G.

---

[5] Revoir l'exercice III.13.

[6] On peut utiliser l'application $f(x) = (d(x, F_1), d(x, F_2))$.

[7] Penser à un problème universel, voir l'exercice VI.25.

Exercice * ***V.13***. Décrire tous les revêtements connexes de la bouteille de Klein(8) (exercices III.6 et V.4). Quel est son plus grand revêtement abélien ?

Exercice * ***V.14*** **(Revêtements des groupes topologiques — examen, 2003)**. Soit G un groupe topologique connexe et localement connexe par arcs(9) d'élément neutre e. On considère un revêtement $p : E \to G$ de G par un espace E connexe par arcs et un élément ε de $p^{-1}(e)$.

Question préliminaire. Rappeler pourquoi p est galoisien.

On définit deux applications m et ι par

$$\begin{aligned} m : E \times E &\longrightarrow G \\ (a,b) &\longmapsto p(a)\cdot p(b) \quad \text{(le point désigne la multiplication du groupe)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \iota : E &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto p(a)^{-1} \quad \text{(inverse dans le groupe).} \end{aligned}$$

Montrer que $m_\star(\pi_1(E \times E, (\varepsilon, \varepsilon))) \subset p_\star(\pi_1(E, \varepsilon))$. En déduire qu'il existe une unique application continue

$$\widetilde{m} : E \times E \longrightarrow E$$

telle que $p \circ \widetilde{m}(a,b) = p(a) \cdot p(b)$ pour tous a et b dans E et $\widetilde{m}(\varepsilon,\varepsilon) = \varepsilon$.

Montrer qu'il existe une unique application continue

$$\widetilde{\iota} : E \longrightarrow E$$

telle que $p \circ \widetilde{\iota}(a) = p(a)^{-1}$ pour tout a et $\widetilde{\iota}(\varepsilon) = \varepsilon$.

Montrer que

$$\widetilde{m}(\widetilde{m}(a,b),c) = \widetilde{m}(a,\widetilde{m}(b,c))$$

et que

$$\widetilde{m}(\widetilde{\iota}(a),a) = \varepsilon.$$

Montrer que $\widetilde{m}$ et $\widetilde{\iota}$ permettent de définir une structure de groupe topologique sur E dont ε est l'élément neutre et telle que p est un homomorphisme de groupes.

Soit ε' un autre élément de $p^{-1}(e)$. Montrer qu'il existe un automorphisme g du revêtement p tel que $g(\varepsilon) = \varepsilon'$. Montrer que g est un isomorphisme de groupes de E (avec la structure de groupe définie ci-dessus grâce à ε) sur E (avec la structure analogue définie par ε').

Exemples. Déterminer toutes les structures de groupe topologique sur $\mathbf{R}$ telles que l'application

$$\begin{aligned} p : \mathbf{R} &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto e^{2i\pi t} \end{aligned}$$

soit un homomorphisme (continu) de groupes topologiques.

On suppose que n est un entier, $n \geq 3$. Montrer qu'il existe un groupe topologique compact, connexe par arcs et simplement connexe, que l'on note $\mathrm{Spin}(n)$, et un revêtement

$$p : \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{O}^+(n)$$

qui est un homomorphisme de groupes topologiques. À quoi est isomorphe le noyau de p ?

Exercice * ***V.15*** **(Revêtement universel du huit)**. On construit une partie $\widetilde{X}$ de $\mathbf{R}^2$ par récurrence de la façon suivante (voir la figure 1) :

– Étape 0. L'ensemble X_0 est formé du seul point 0.
– Étape 1. L'ensemble X_1 est formé des quatre segments $[-1,1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [-1,1]$.

(8) Il s'agit de décrire les sous-groupes du groupe fondamental de la bouteille de Klein (exercice V.4). Attention, la détermination de ceux de ces sous-groupes qui sont distingués (c'est-à-dire des revêtements galoisiens) est assez délicate — plus, en tout cas, que ce qui apparaît dans [**God71**, p. 141].

(9) On rappelle que la structure de groupe de $\pi_1(G,e)$ est définie par la composition des lacets, ou, de façon équivalente, par le produit du groupe ; de plus, $\pi_1(G,e)$ est alors un groupe abélien (voir l'exercice IV.19).

– On a donc un graphe formé de quatre arêtes, deux horizontales et deux verticales. À distance $\frac{1}{3}$ de l'extrémité libre de chacune, on ajoute le segment de longueur $\frac{2}{3}$ dont l'arête est la médiatrice.
– Étape n. À distance $\frac{1}{3^n}$ de l'extrémité libre de chaque arête, on ajoute un segment de longueur $\frac{2}{3^n}$ dont notre arête est la médiatrice.

On construit ainsi une partie de $\mathbf{R}^2$ formée de segments horizontaux et verticaux se coupant orthogonalement. On munit l'ensemble $\widetilde{X}$ de la distance d telle que :

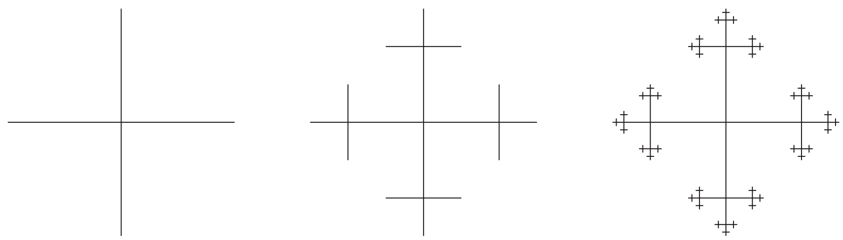


Figure 1

– chaque arête est isométrique au segment $]0,1[$ de $\mathbf{R}$,
– la distance de deux sommets est le nombre d'arêtes d'un chemin (sans aller-retour) dans $\widetilde{X}$ joignant ces deux sommets.

Montrer que $\widetilde{X}$ muni de d est un espace métrique connexe et simplement connexe, en fait contractile, un arbre (attention, la topologie définie par d n'est pas celle induite par la topologie de $\mathbf{R}^2$, le graphe n'a été construit dans $\mathbf{R}^2$ que pour la commodité des dessins).

On oriente maintenant toutes les arêtes horizontales de gauche à droite et les verticales de bas en haut. On définit une application p de $\widetilde{X}$ sur le huit en envoyant chaque arête horizontale (resp. verticale) sur la boucle a (resp. b) par un homéomorphisme (voir la figure 2). Montrer que p est un revêtement (universel).

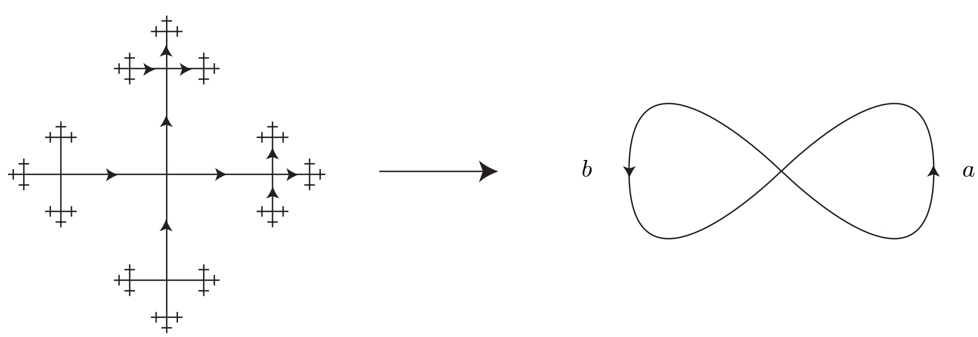


Figure 2

Exercice** *V.16. Soit C_n le cercle de $\mathbf{R}^2$ dont le centre est $(\frac{1}{n},0)$ et le rayon $\frac{1}{n}$. Soit X la réunion de tous les C_i. Montrer que X est connexe, localement connexe par arcs, mais n'est pas semi-localement simplement connexe.

CHAPITRE VI

THÉORÈME DE VAN KAMPEN

1. Énoncé du théorème

Soit B un espace possédant un revêtement universel. On suppose que B est recouvert par deux ouverts U_1 et U_2 qui sont connexes par arcs et dont l'intersection est aussi connexe par arcs. On choisit un point base b dans $U_1 \cap U_2$. On sait (voir la proposition IV-6.1) que le groupe fondamental de B est engendré par ceux de U_1 et U_2. Le théorème de van Kampen affirme plus précisément que le groupe $\pi_1(B,b)$ est la solution du problème universel

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, b) \arrow[r, "(j_1)_\star"] \arrow[d, "(j_2)_\star"] & \pi_1(U_1, b) \arrow[d, dotted, "(i_1)_\star"'] \arrow[ddr, "f_1"] & \\
\pi_1(U_2, b) \arrow[r, dotted, "(i_2)_\star"] \arrow[drr, "f_2"'] & \pi_1(B, b) \arrow[dr, dotted] & \\
 & & G
\end{tikzcd}$$

(« somme amalgamée ») où G est un groupe, f_1 et f_2 des homomorphismes de groupes et où les autres homomorphismes sont induits par les inclusions

$$\begin{tikzcd}
U_1 \cap U_2 \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & U_1 \arrow[d, "i_1"'] \\
U_2 \arrow[r, "i_2"] & B
\end{tikzcd}$$

Le groupe obtenu est une fonction assez compliquée des groupes fondamentaux des ouverts U_1, U_2 et $U_1 \cap U_2$. Des cas particuliers intéressants sont ceux où l'un de ces ouverts est simplement connexe :

- Si $U_1 \cap U_2$ est simplement connexe, $\pi_1(B,b)$ est le « produit libre » des groupes fondamentaux de U_1 et U_2. Voir le § 4.
- Si U_2 est simplement connexe, la somme amalgamée est un quotient du groupe fondamental de U_1. Voir l'exercice VI.9.

Pour démontrer le théorème, on doit donc considérer un groupe G quelconque et le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U_1 \cap U_2, b) \arrow[r, "(j_1)_\star"] \arrow[d, "(j_2)_\star"] & \pi_1(U_1, b) \arrow[dd, "f_1"] \\
\pi_1(U_2, b) \arrow[dr, "f_2"] & \\
& G
\end{tikzcd}$$

et en déduire un homomorphisme de groupes

$$f : \pi_1(B, b) \longrightarrow G.$$

Le groupe fondamental de B opérant sur les revêtements de B, l'idée de la démonstration est donc d'utiliser le diagramme pour construire un revêtement de B dont la fibre soit G et sur lequel $\pi_1(B, b)$ opérera par un homomorphisme $\pi_1(B, b) \to G$.

Il faut d'abord apprendre à construire un revêtement de fibre donnée.

2. Revêtements associés à un revêtement galoisien

Étant donnés un revêtement galoisien et un ensemble sur lequel le groupe d'automorphismes de ce revêtement opère, on construit un revêtement dont la fibre est l'ensemble en question.

Soit $p : E \to B$ un revêtement galoisien de groupe $G = \mathrm{Aut}(p)$ et soit F un espace discret muni d'une opération à droite de G. On peut faire opérer G à droite sur $E \times F$ par

$$(e, f) \cdot g = (g^{-1} \cdot e, f \cdot g).$$

Remarque 2.1. Ainsi, sous la relation d'orbite, on a

$$(g \cdot e, f) \sim (e, f \cdot g)$$

(appliquer g).

Proposition 2.2. *L'opération de G sur $E \times F$ est propre et libre.*

Démonstration. L'opération de G sur E est libre, donc elle reste libre sur $E \times F$. Pour la propreté, comme F est discret, ses compacts sont ses parties finies. On a

$$(K \times A) \cdot g \cap (K \times A) = (g^{-1}(K) \cap K) \times (A \cdot g \cap A).$$

De la propreté de l'opération de G sur E, on déduit donc celle de l'opération de G sur $E \times F$. □

Notons le quotient $E \times_G F$. Si E est localement compact, la projection $\pi : E \times F \to E \times_G F$ est un revêtement et on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[d, "p"] \\
E \times_G F \arrow[r, "p_F"] & B
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.3. *La projection $p_F : E \times_G F \to B$ est un revêtement dont les fibres sont en bijection avec F.*

Remarque 2.4. On a donc ainsi construit un revêtement $E\times_G F\to B$ tel que le revêtement tiré en arrière par p sur E soit le revêtement trivial $E\times F\to E$ (redessiner le diagramme précédent en lui faisant subir la symétrie autour de sa diagonale nord-ouest/sud-est).

Démonstration. Soit b un point de B et soit V un voisinage de b trivialisant le revêtement p. Soit $x\in p^{-1}(b)$ et soit s une section de p au dessus de V telle que $s(b)=x$. Pour tout f dans F, appelons σ_f l'application définie par

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow E\times_G F\\ y &\longmapsto [s(y),f]\end{aligned}$$

(en désignant par des crochets les classes modulo G). C'est une section de p_F au dessus de V :

$$p_F([s(y),f])=p(s(y))=y.$$

De plus, $\pi^{-1}(\sigma_f(V))=(s(V)\times\{f\})\cdot G$ est un ouvert.

Les images des σ_f sont disjointes. En effet, si $\sigma_f(y)=\sigma_{f'}(z)$, alors on a $y=z$ (en projetant) et $(s(y),f)=(s(y),f')\cdot g$ donc $g=\mathrm{Id}$ et $f=f'$.

Enfin $p_F^{-1}(V)=\cup_{f\in F}\sigma_f(V)$: si $[y,f]\in p_F^{-1}(V)$, alors pour un certain $g\in G$, $g^{-1}\cdot y\in s(V)$ et $[y,f]=\sigma_{f\cdot g}(p(y))$.

On a donc bien un revêtement de fibre F et plus précisément, pour tout x dans la fibre $p^{-1}(b)$, une bijection

$$\begin{aligned} r_x : F &\longrightarrow p_F^{-1}(b)\\ f &\longmapsto [x,f].\end{aligned}$$

□

Dans la situation considérée ici, où $p:E\to B$ est un revêtement galoisien, on peut utiliser l'homomorphisme

$$h:\pi_1(B,b)\to G$$

mis en évidence dans la démonstration du théorème V-2.4. Grâce auquel le groupe fondamental $\pi_1(B,b)$ opère à droite sur F par :

$$f\cdot[c]=f\cdot h([c]).$$

Comme $p_F:E\times_G F\to B$ est un revêtement, on a aussi une opération à droite du groupe fondamental $\pi_1(B,b)$ sur la fibre $p_F^{-1}(b)$. La bijection r_x exhibée ci-dessus est compatible avec ces opérations (à droite) du groupe fondamental au sens où elle vérifie

$$r_x(f)\cdot[c]=r_x(f\cdot[c]).$$

En effet, appelons $\widetilde{c}$ le relèvement de c d'origine x dans E et définissons $c'_f(t)=[\widetilde{c}(t),f]$, c'est le relèvement d'origine $[x,f]$ de c dans $E\times_G F$. On a

$$\begin{aligned} r_x(f)\cdot[c] &= [x,f]\cdot[c] \text{ (définition de } r_x)\\ &= [\widetilde{c}(1),f] \text{ (définition de } \widetilde{c})\\ &= [h([c])\cdot x,f] \text{ (définition de } h)\\ &= [x,f\cdot h([c])] \text{ (définition des classes d'équivalence)}\\ &= [x,f\cdot[c]] \text{ (définition de l'opération de } \pi_1(B,b) \text{ sur } F)\\ &= r_x(f\cdot[c]) \text{ (définition de } r_x)\end{aligned}$$

... ce que nous voulions démontrer.

3. Démonstration du théorème

On considère donc la situation des deux ouverts U_1 et U_2 du théorème de van Kampen. On se donne un groupe G et des homomorphismes f_1 et f_2 des groupes fondamentaux de ces ouverts dans G satisfaisant à $f_1 \circ (j_1)_\star = f_2 \circ (j_2)_\star$.

L'idée de la démonstration est

- d'utiliser f_1 et f_2 pour construire des revêtements $E_1 \to U_1$ et $E_2 \to U_2$ de fibre G
- d'utiliser la compatibilité sur $U_1 \cap U_2$ pour en déduire par recollement un revêtement $E \to B$ de fibre G
- dont on déduira un homomorphisme $\pi_1(B, b) \to G$.

Construction de revêtements $E_i \to B_i$ de fibre G. L'ouvert U_1 possède un revêtement universel $\widetilde{U}_1 \to U_1$. Le groupe d'automorphismes de ce revêtement est le groupe fondamental $\pi_1(U_1, b)$. Grâce à l'homomorphisme f_1, ce groupe opère sur G par translations à droite :

$$(g, \alpha) \mapsto g f_1(\alpha) \quad \text{(multiplication dans le groupe } G\text{)}.$$

Appelons donc $p_1 : E_1 \to U_1$ un revêtement associé, « de fibre G ». Il existe une bijection $r : G \to p_1^{-1}(b)$ (un r_x, pour le choix d'un élément x de la fibre de b dans $\widetilde{U}_1$), compatible avec les opérations à droite de $\pi_1(U_1, b)$, comme on l'a expliqué ci-dessus :

$$\text{pour } \alpha \in \pi_1(U_1, b), g \in G, \qquad r(g) \cdot \alpha = r(g \cdot f_1(\alpha)).$$

On obtient de même un revêtement $p_2 : E_2 \to U_2$ dont les fibres sont en bijection avec G, par une bijection $s : G \to p_2^{-1}(b)$ compatible avec les opérations, toujours à droite, de $\pi_1(U_2, b)$.

Recollement de E_1 et E_2. De la relation $f_1 \circ (j_1)_\star = f_2 \circ (j_2)_\star$, on peut déduire que les deux revêtements

$$p_1 : D_1 = p_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow U_1 \cap U_2 \text{ et } p_2 : D_2 = p_2^{-1}(U_1 \cap U_2) \longrightarrow U_1 \cap U_2$$

sont isomorphes par un isomorphisme t tel que $t \,|_{p_2^{-1}(b)} = r \circ s^{-1}$. C'est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soient $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to B$ deux revêtements d'un espace B connexe et localement connexe par arcs par des espaces localement connexes par arcs (mais pas nécessairement connexes). Soit $b \in B$. Il existe un isomorphisme de revêtements $f : E_1 \to E_2$ si et seulement si il existe une bijection $t : p_1^{-1}(b) \to p_2^{-1}(b)$ compatible avec l'opération de $\pi_1(B, b)$ au sens où*

$$t(x \cdot \alpha) = t(x) \cdot \alpha \text{ pour tout } x \in p_1^{-1}(b) \text{ et tout } \alpha \in \pi_1(B, b).$$

Admettons ce lemme pour l'instant. On peut donc recoller les deux revêtements E_1 et E_2 au-dessus de $U_1 \cap U_2$ grâce à l'isomorphisme t. Soit $p : E \to B$ le revêtement obtenu. Notons $q : E_1 \coprod E_2 \to E$ l'application quotient.

L'application $\pi_1(B) \to G$. Les fibres du revêtement p sont en bijection avec G, on a même explicitement une bijection

$$\tau = q \circ s = q \circ t \circ r = q \circ r : G \longrightarrow p^{-1}(b).$$

Le groupe fondamental $\pi_1(B, b)$ opère à droite sur les fibres comme il se doit.

Les restrictions $q \,|_{E_k} : E_k \to p^{-1}(U_k)$ sont des isomorphismes de revêtements au-dessus de U_k. On a ainsi

$$q(x \cdot \alpha_k) = q(x)(\alpha_k) \text{ pour tout } \alpha_k \in \pi_1(U_k, b).$$

De quoi l'on déduit

$$\tau(g) \cdot (i_k)_\star(\alpha_k) = \tau(g f_k(\alpha_k)) \text{ toujours pour tout } \alpha_k \in \pi_1(U_k, b).$$

Comme le groupe fondamental $\pi_1(B, b)$ est engendré par les images de $(i_1)_\star$ et de $(i_2)_\star$, il existe, pour tout $\alpha \in \pi_1(B, b)$, un élément $f(\alpha) \in G$ tel que

$$\tau(g) \cdot \alpha = \tau(g f(\alpha)).$$

Enfin, on a

$$\tau(gf(\alpha_1)f(\alpha_2)) = (\tau(g)\cdot\alpha_1)\cdot\alpha_2 = \tau(g)\cdot(\alpha_1\alpha_2) = \tau(gf(\alpha_1\alpha_2)).$$

Comme τ est bijective, on en déduit que $f : \pi_1(B,b) \to G$ est un homomorphisme satisfaisant $f\circ(i_k)_\star = f_k$. □

Démonstration du lemme 3.1. La condition est évidemment nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante. Soit $x \in p_1^{-1}(b)$ et soit $(E_1)_x$ sa composante connexe par arcs dans E_1. Appelons de même $(E_2)_{t(x)}$ la composante connexe par arcs de $t(x)$ dans E_2. Les restrictions des revêtements p_1 et p_2 à ces composantes sont encore des revêtements (voir l'exercice III.3).

Soit γ un lacet de base x dans $(E_1)_x$. Relevons le lacet $c = p_1\circ\gamma$ avec origine $t(x)$ dans $(E_2)_{t(x)}$. Comme c provient d'un lacet dans $(E_1)_x$, on a

$$t(x) = t(x\cdot[c]) = t(x)\cdot[c],$$

autrement dit, le relèvement $\widetilde{p_1\circ\gamma}$ de c à $(E_2)_{t(x)}$ d'origine $t(x)$ a aussi pour extrémité $t(x)$. Ainsi on a

$$(p_1)_\star\pi_1(E_1,x) \subset (p_2)_\star\pi_1(E_2,t(x))$$

donc p_1 se relève en un homomorphisme de revêtements $h_x : (E_1)_x \to (E_2)_{t(x)}$... qui est un isomorphisme (en utilisant t^{-1} pour montrer l'inclusion des groupes fondamentaux en sens inverse).

On a ainsi un isomorphisme h_x pour chaque composante connexe. Comme t est bijective, ces isomorphismes s'assemblent pour former un isomorphisme $h : E_1 \to E_2$.

□

4. Appendice : groupes libres, produits libres

Pour ce paragraphe, voir par exemple [**Zis72**] ou [**Gui98**]. Si S est un ensemble, le *groupe libre* engendré par S est un groupe L, muni d'une application $\varphi : S \to L$ solution du « problème universel » suivant. Pour tout groupe H et toute application ψ de S dans H, il existe un unique homomorphisme de groupes f de L dans H, tel que $f\circ\varphi = \psi$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & L \arrow[dl, dotted, "f"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Comme toute solution d'un problème universel, L est alors bien défini à isomorphisme unique près.

***Exemple 4.1* (Groupe libre à un générateur)**. Si S est un ensemble à un élément (singleton), alors le groupe cyclique engendré par cet élément est solution. Remarquons que ce groupe est abélien.

***Exemple 4.2* (Groupe libre à deux générateurs)**. Si $S = \{a,b\}$, on fabrique le groupe libre L engendré par S en considérant d'abord l'ensemble $\widetilde{L}$ des *mots* en a et b, c'est-à-dire des expressions

$$a^{m_1}b^{n_1}\cdots a^{m_k}b^{n_k}$$

où les m_j et n_j parcourent $\mathbf{Z}$. On définit un produit sur $\widetilde{L}$ par juxtaposition des mots. Finalement, L est le quotient de $\widetilde{L}$ par la relation d'équivalence engendrée par

$$a^{m_1}a^{m_2} = a^{m_1+m_2}, \qquad b^{n_1}b^{n_2} = b^{n_1+n_2}.$$

La loi de produit sur $\widetilde{L}$ définit bien une loi de groupe sur L. Ce groupe est solution du problème universel.

Remarque 4.3. Dès que S a plus d'un élément, le groupe L, s'il existe, n'est pas commutatif. Soient en effet a, b, deux éléments distincts de S. Soit H un groupe *non* commutatif et soient α, β, deux éléments de H qui ne commutent pas. Définissons $\varphi : S \to H$ en envoyant a sur α, b sur β et les autres éléments de S sur l'élément neutre de H. Alors $f(a)$ et $f(b)$ ne peuvent pas commuter, donc L n'est pas commutatif[(1)].

On définit de même le groupe libre sur un nombre n de générateurs à partir des mots formés sur ces générateurs. Voici une définition formelle du groupe libre engendré par S. On considère un autre ensemble S' avec une bijection

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow S' \\ x &\longmapsto x'. \end{aligned}$$

On forme ensuite l'ensemble $M(S \coprod S')$ des « mots », suites finies d'éléments de $S \coprod S'$, sur lequel on met la loi de composition

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_p) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p)$$

qui est un produit associatif ayant la suite vide comme élément neutre[(2)]. En identifiant les éléments de $S \coprod S'$ à des éléments de $M(S \coprod S')$ (suites à un élément), on peut aussi écrire

$$(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n.$$

Maintenant on transforme $M(S \coprod S')$ en groupe, en demandant que les éléments de S' soient les inverses des éléments correspondants de S. En d'autres termes, on met sur $M(S \coprod S')$ la relation d'équivalence engendrée par

$$axx'b \mathrel{\mathcal{R}} ab \text{ et } ax'xb \mathrel{\mathcal{R}} ab \text{ pour tous } a, b \in M(S \coprod S') \text{ et } x \in S.$$

Proposition 4.4. *Le quotient $L = M(S \coprod S')/\mathcal{R}$ est un groupe solution du problème universel pour le groupe libre engendré par S.*

Démonstration. Il est assez clair qu'on a maintenant un groupe, l'inverse de la classe du mot $x_1 \cdots x_n$ étant celle du mot $x'_n \cdots x'_1$. Vérifions que L est solution du problème universel. On a bien une application $\varphi : S \to L$. Considérons une application $\psi : S \to H$. On pose

$$f(x') = \psi(x)^{-1} \text{ et } f(x_1 \cdots x_n) = \psi(x_1) \cdots \psi(x_n).$$

On a

$$f(axx'b) = f(a)\psi(x)\psi(x)^{-1}f(b) = f(a)f(b)$$

donc on a bien défini une application

$$f : L \longrightarrow H$$

qui est un morphisme de groupes et le seul à prolonger ψ. □

---

(1) On vient de montrer : s'il existe un groupe qui n'est pas commutatif, alors le groupe libre à deux générateurs n'est pas commutatif. Voir l'exercice IV.12.

(2) La structure de M est celle d'un *monoïde*.

Produit libre de deux groupes. On considère maintenant le problème universel suivant. Deux groupes G_1 et G_2 sont donnés, on cherche un groupe, noté $G_1 \star G_2$ et des homomorphismes i_1 et i_2 de G_1 et G_2 dans G tels que, pour tous morphismes f_1 et f_2 de G_1 et G_2 dans un groupe G, il existe un unique morphisme de $G_1 \star G_2$ dans G faisant commuter le diagramme(3)

$$\begin{tikzcd}
& G_1 \arrow[d, dotted, "i_1"'] \arrow[ddr, "f_1"] & \\
G_2 \arrow[r, dotted, "i_2"] \arrow[drr, "f_2"'] & G_1 \star G_2 \arrow[dr, dotted] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

un tel groupe, s'il existe, est unique à isomorphisme près.

Pour en construire un, on peut utiliser la même méthode que pour la construction du groupe libre. On considère la réunion disjointe E des ensembles G_1 et G_2 et l'ensemble $M(E)$ des mots en les éléments de E, c'est-à-dire des suites finies $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E, qu'on munit d'une loi de composition (d'une structure de monoïde) par juxtaposition. Comme ci-dessus, on note donc

$$x_1 \cdots x_n = (x_1, \ldots, x_n).$$

On quotiente maintenant par une relation d'équivalence qui tient compte des lois de groupe de G_1 et G_2, celle engendrée par

$$axyb \,\mathcal{R}\, azb \text{ si } a, b \in M(E) \text{ et } x, y, z \in G_i \text{ avec } z = xy, \qquad \text{et } a1b \,\mathcal{R}\, ab \text{ si 1 est l'élément neutre de } G_i.$$

Proposition 4.5. *Le quotient $M(E)/\mathcal{R}$ est un groupe qui satisfait à la propriété universelle du produit libre des deux groupes G_1 et G_2.*

Démonstration. Il est clair comme ci-dessus que le quotient est un groupe et que les deux groupes sont munis d'homomorphismes naturels à valeurs dans ce groupe, envoyant $x \in G_i$ sur la classe de x dans le quotient. Soient maintenant f_1 et f_2 des morphismes de G_1 et G_2 respectivement dans un groupe G. Appelons $\overline{f}$ l'application évidente déduite de f_1 et f_2, de la réunion disjointe E dans G. On pose

$$f(x_1 \cdots x_n) = \overline{f}(x_1) \cdots \overline{f}(x_n) \in G.$$

Si x et y sont des éléments d'un des G_i, posons $z = xy \in G_i$. On a alors

$$f(axyb) = \overline{f}(a) f_i(x) f_i(y) \overline{f}(b) = \overline{f}(a) f_i(xy) \overline{f}(b)$$

et bien sûr

$$f(azb) = \overline{f}(a) f_i(z) \overline{f}(b) = \overline{f}(a) f_i(xy) \overline{f}(b)$$

de sorte que l'on a bien défini une application f du quotient à valeurs dans G, laquelle application est un homomorphisme de groupes par définition de la structure de groupes, et le seul possible. Notre quotient mérite donc bien d'être appelé $G_1 \star G_2$. □

***Exemple 4.6* (Le groupe $\mathbf{Z}/2 \star \mathbf{Z}/2$)**. Soient G_1 le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par un élément x_1, G_2 le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par un élément x_2. Le produit libre de ces deux groupes est l'ensemble des expressions

$$1, x_1, x_1x_2, x_1x_2x_1x_2, x_1x_2x_1x_2x_1x_2, \ldots, x_2, x_2x_1, x_2x_1x_2, \ldots$$

(3) Il s'agit de la *somme* dans la catégorie des groupes. Voir [**Zis72**].

muni de la loi de groupe définie par juxtaposition (et quotienté par les relations $x_1^2 = x_2^2 = 1$). Ce groupe est infini[4], les éléments x_1x_2 et $x_2x_2x_1$ (entre autres) sont d'ordre infini.

Proposition 4.7. *Le produit libre des groupes libres L_1 et L_2 engendrés par S_1 et S_2 est le groupe libre engendré par $S_1 \coprod S_2$.*

Démonstration. Soit L ce groupe libre. On suppose donc donnés des morphismes de groupes f_1 et f_2 de L_1 et L_2 à valeurs dans un groupe G. Si φ_1 et φ_2 sont les applications de S_1 et S_2 dans L_1 et L_2 définissant les groupes libres L_1 et L_2, on a par composition une application

$$\varphi = f_1 \circ \varphi_1 \coprod f_2 \circ \varphi_2 : S_1 \coprod S_2 \longrightarrow G.$$

Les propriétés universelles définissant L_1 et L_2 donnent des morphismes de groupes $L_1 \to L$ et $L_2 \to L$. La propriété universelle définissant L donne alors un unique morphisme de groupes

$$f : L \longrightarrow G$$

tel que $f \circ \varphi = \psi$. Celui-ci est l'unique solution du problème universel donnant le produit libre. □

Exemple 4.8. Le groupe $\mathbf{Z} \star \mathbf{Z}$ est un groupe libre à deux générateurs.

Remarque 4.9. Il n'y a aucune raison de se limiter à deux ou même à un nombre fini de groupes dans cette construction. On peut faire le produit libre d'un nombre arbitraire de groupes. Voir [**Zis72**]. Retenons que le produit libre de deux groupes libres est libre, en toute généralité (même si je ne l'ai démontré ici qu'avec des systèmes finis de générateurs).

Exercices

Exercice * ***VI.1***. Quel est le groupe fondamental de l'espace en forme de huit ? Quel est le groupe fondamental d'un bouquet de n cercles[5] (figure 2) ? Quel est le groupe fondamental du complémentaire de n points (distincts) dans $\mathbf{R}^2$?

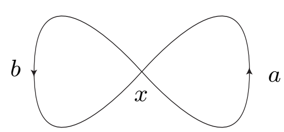


FIGURE 1. Huit

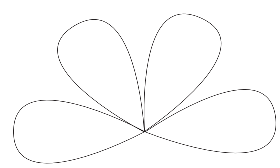


FIGURE 2. Bouquet

Exercice * ***VI.2***. Déterminer le groupe d'automorphismes du revêtement du huit décrit dans l'exercice V.15. Quel est le plus grand revêtement abélien du huit ?

Exercice * ***VI.3***. Déterminer le groupe fondamental des espaces représentés sur la figure 3 (voir plus généralement l'exercice VI.20).

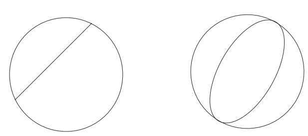


FIGURE 3

[4] C'est un « groupe diédral infini », produit semi-direct de $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/2$, voir l'exercice VI.31.
[5] Voir plus généralement l'exercice VI.20.

Exercice** *VI.4. Construire un espace topologique connexe par arcs dont le groupe fondamental soit isomorphe à $\mathbf{Z} \star \mathbf{Z}/2$, resp. $\mathbf{Z}/2 \star \mathbf{Z}/2$.

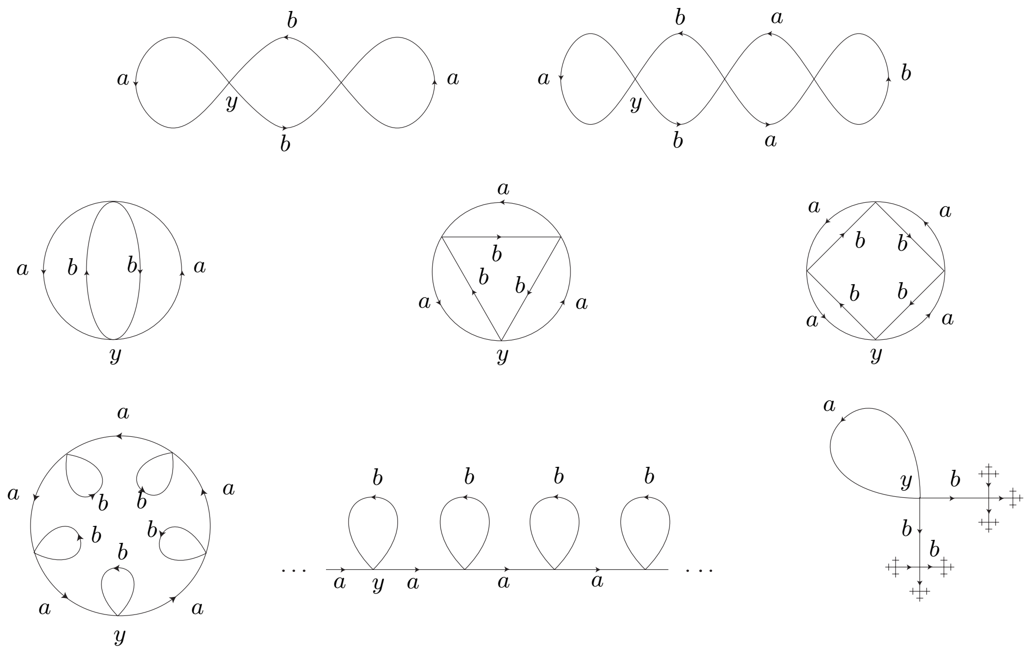


FIGURE 4

***Exercice** *VI.5* (Revêtements du huit)**. Pour chacun des neuf graphes Y représentés sur la figure 4, on considère une application continue f de Y sur le huit, qui envoie chacun des sommets sur x et se restreint en un homéomorphisme des arêtes marquées a sur l'arête a, de celles marquées b sur b (notation de la figure 1 ci-dessus, pour comprendre comment est fait le dernier graphe, voir l'exercice V.15). Dans tous les cas, vérifier que f est un revêtement et déterminer le sous-groupe correspondant $f_\star\pi_1(Y, y)$ du groupe fondamental du huit.

Montrer que le groupe libre à deux générateurs contient, pour tout n, un sous-groupe isomorphe au groupe libre à n générateurs et même un groupe libre à une infinité de générateurs. Voir aussi les exercices VI.20, VI.21 et VI.23.

Exercice** *VI.6. On donne un point A et une droite D ne passant pas par A dans $\mathbf{R}^3$. Quel est le groupe fondamental du complémentaire de $D \cup \{A\}$ dans $\mathbf{R}^3$?

Plus généralement, si A et D sont deux sous-espaces affines disjoints de $\mathbf{R}^n$, quel est le groupe fondamental du complémentaire de $A \cup D$ (on discutera suivant les codimensions de A et D) ?

Exercice** *VI.7. On donne un cercle et une droite dans $\mathbf{R}^3$, la droite D rencontrant le disque ouvert bordé par C. On veut évaluer le groupe fondamental de $D \cup C$. Montrer qu'on peut supposer que la droite est orthogonale au plan de C et passe par le centre de C. La figure est maintenant invariante par les rotations autour de D. Montrer que le groupe fondamental du complémentaire de $D \cup C$ est isomorphe à $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

***Exercice** *VI.8* (Groupe fondamental de $\mathrm{O}^+(n)$)**. Vérifier que l'homéomorphisme de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ sur $\mathrm{O}^+(3)$ donné dans l'exercice II.37 envoie $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ sur $\mathrm{O}^+(2) \subset \mathrm{O}^+(3)$. En déduire que l'homomorphisme

$$\pi_1(\mathrm{O}^+(2)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{O}^+(3))$$

induit par l'inclusion est l'unique homomorphisme surjectif de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/2$ (on peut utiliser l'exercice IV.30).

Le but de cet exercice est de montrer (par récurrence sur n) et en utilisant la même méthode que pour la simple connexité de $\mathrm{SU}(n)$ dans l'exercice IV.32, que, pour $n \geq 3$, le groupe fondamental de $\mathrm{O}^+(n)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}/2$ et que l'homomorphisme

$$\pi_1(\mathrm{O}^+(n)) \longrightarrow \pi_1(\mathrm{O}^+(n+1))$$

est toujours surjectif.

Soient N le pôle nord de la sphère $S^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, U le complémentaire du pôle sud, V celui du pôle nord. On appelle encore p l'application

$$\mathrm{O}^+(n) \longrightarrow S^{n-1}$$

définie par $p(A) = A \cdot N$. Pour tout vecteur x de U, on appelle $s(x)$ la rotation qui envoie N sur x et fixe le sous-espace orthogonal à celui engendré par N et x.

Montrer que l'application

$$\begin{aligned} U \times \mathrm{O}^+(n-1) &\longrightarrow \mathrm{O}^+(n) \\ (x, A) &\longmapsto s(x) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un homéomorphisme sur son image.

Conclure.

Exercice * ***VI.9***. On considère le problème universel définissant la « somme amalgamée » de deux groupes G_1 et G_2 par un groupe H :

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "j_2"] & G_1 \arrow[d, dotted, "i_1"] \arrow[ddr, "f_1"] & \\
G_2 \arrow[r, dotted, "i_2"] \arrow[drr, "f_2"'] & S \arrow[dr, dotted] & \\
& & G
\end{tikzcd}$$

dans le cas où le groupe G_2 est trivial. Montrer que la solution S est le groupe quotient de G_1 par le sous-groupe distingué engendré par l'image de H.

Exercice * ***VI.10***. En utilisant les exercices VI.9 et VI.7, montrer que le groupe fondamental du complémentaire d'un cercle C (contenu dans un plan) dans $\mathbf{R}^3$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

On considère la sphère S^3 comme $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ (voir l'exercice II.8). Le cercle C de $\mathbf{R}^3$ est donc considéré comme une partie de S^3. Quel est le groupe fondamental de $S^3 - C$?

Exercice * ***VI.11***. On donne un cercle C dans un plan de $\mathbf{R}^3$ et une droite D qui ne rencontre pas le disque bordé par par ce cercle. Quel est le groupe fondamental du complémentaire de $C \cup D$?

Exercice * ***VI.12***. Existe-t-il un homéomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même comme indiqué sur la figure 5, c'est-à-dire qui transforme la figure considérée dans l'exercice VI.7 (un cercle et une droite « enlacés ») en celle considérée dans l'exercice VI.11 (un cercle et une droite « non enlacés ») ?

Exercice * ***VI.13***. On considère la fibration de Hopf $p : S^3 \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (exercice IV.20) et plus précisément les fibres C_1 passant par $(1, 0)$ et C_2 passant par $(0, 1)$. Déterminer le groupe fondamental du complémentaire dans S^3 de $C_1 \cup C_2$. Déterminer plus généralement le groupe fondamental du complémentaire de deux fibres quelconques de p.

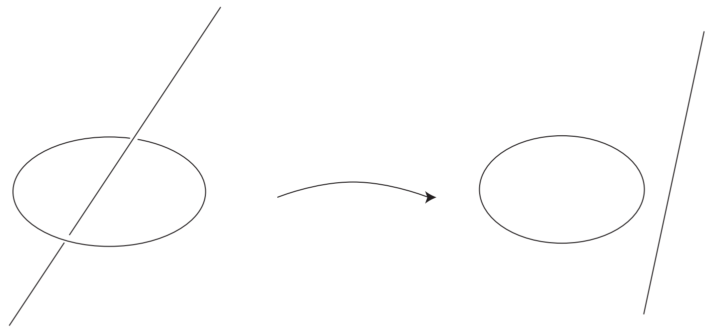


FIGURE 5

Exercice * ***VI.14***. Soient V_1 et V_2 les ouverts de $\mathbf{R}^2$ définis par

$$V_1 = \{(x,y) \mid -\varepsilon < x < \varepsilon \text{ ou } -\varepsilon < y < \varepsilon\}$$

$$V_2 = \{(x,y) \mid 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1\}$$

(ε est un réel, $\varepsilon \in]0, 1/2[$) et U_1, U_2 leurs images dans le tore $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$. Vérifier qu'on a $T^2 = U_1 \cup U_2$ et que ce recouvrement satisfait aux hypothèses du théorème de van Kampen. Déterminer les groupes fondamentaux de U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ et retrouver le groupe fondamental du tore.

Exercice * ***VI.15***. En utilisant les mêmes ouverts de $\mathbf{R}^2$ que dans l'exercice VI.14 et leurs images dans la bouteille de Klein (exercice III.6), retrouver le groupe fondamental de celle-ci (exercice V.4).

Exercice * ***VI.16***. La sphère unité S^2 de $\mathbf{R}^3$ est la réunion de trois ouverts

$$V_1 = \{(x,y,z) \mid z > 0\}, \quad V_1' = \{(x,y,z) \mid z < 0\},$$

$$V_2 = \left\{(x,y,z) \mid -\frac{1}{2} < z < \frac{1}{2}\right\}.$$

Montrer que le plan projectif $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ peut s'écrire comme réunion des images U_1 et U_2 de V_1 et V_2. Montrer que U_1 est homéomorphe à un disque et U_2 à une bande de Möbius. Quelle est l'intersection ? Montrer qu'on peut appliquer le théorème de van Kampen et retrouver le groupe fondamental du plan projectif.

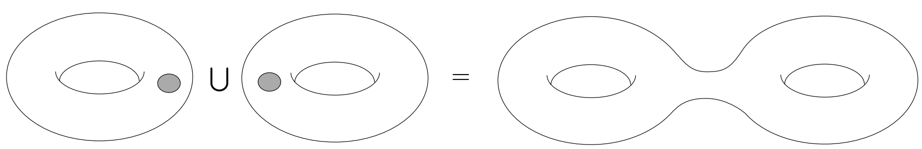


FIGURE 6

Exercice * ***VI.17* (Surface de genre 2)**. On considère l'espace topologique X obtenu en recollant[(6)] deux exemplaires du complémentaire d'un disque dans T^2 le long de leurs bords (figure 6). Montrer que le groupe fondamental de X est isomorphe au quotient du groupe libre à quatre générateurs a_1, b_1, a_2, b_2 par le sous-groupe distingué engendré par $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})^{-1}$.

Montrer que X n'est pas homéomorphe à un tore.

[(6)] L'espace X est une *surface de genre* 2 : il y a deux « trous » — le tore est une surface de genre 1 (un trou) et la sphère une surface de genre 0 (zéro trou). Voir plus généralement [**Mas67**] pour des définitions des mots « surface », « genre » et pour le calcul du groupe fondamental de ces objets.

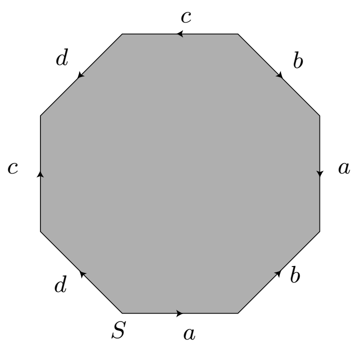


FIGURE 7

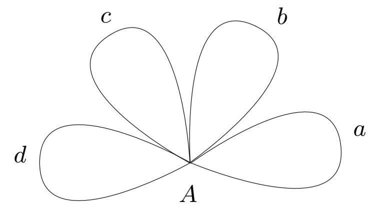


FIGURE 8

Exercice * ***VI.18*** **(Surface de genre 2, version II — examen, 2003)**. On considère l'octogone P (avec la topologie induite par celle de $\mathbf{R}^2$) grisé sur la figure 7 et la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ qui identifie les points du bord comme indiqué sur cette même figure.

On appelle $p : P \to P/\mathcal{R}$ la projection.

Montrer que $P/\mathcal{R}$ est un espace topologique compact[(7)] et que tous les sommets de l'octogone ont la même image par p. On appelle A ce point de $P/\mathcal{R}$. Montrer que l'image par p du bord de P est homéomorphe à un bouquet de quatre cercles (figure 8).

Déterminer le groupe fondamental $\pi_1(P/\mathcal{R}, A)$ et montrer que son abélianisé est isomorphe à $\mathbf{Z}^4$.

Exercice * ***VI.19*** **(Examen, 2004)**. Dans cet exercice, on appelle X_n le bouquet de n cercles obtenu en identifiant, dans la réunion disjointe de n exemplaires $S^1_1, \dots, S^1_n$ du cercle, les n points $1_1, \dots, 1_n$ en un seul point, noté 1 :

$$X_n = S^1_1 \coprod \cdots \coprod S^1_n / 1_i \sim 1_j.$$

On appelle $g_i : S^1_i \to X_n$ l'application induite par l'inclusion. Le groupe fondamental $\pi_1(X_n, 1)$ est un groupe libre sur n générateurs, $a_1, \dots, a_n$, a_i étant l'image par $(g_i)_\star$ du générateur de $\pi_1(S^1_i, 1_i)$.

(1) On fixe des entiers $k \geq 1$, $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ et $m_1, \dots, m_k \in \mathbf{Z}$. On considère l'application

$$f : S^1 \longrightarrow X_n$$

définie par

$$f(z) = g_{j_r}\left(z^{km_r}\right) \text{ si } z = e^{i\theta} \text{ avec } \frac{2\pi(r-1)}{k} \leq \theta \leq \frac{2\pi r}{k}.$$

Déterminer l'homomorphisme

$$f_\star : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \pi_1(X_n, 1).$$

(2) On recolle un disque D^2 à X_n grâce à l'application

$$D^2 \supset S^1 \xrightarrow{\ f\ } X_n,$$

obtenant ainsi un espace $Y = D^2 \cup_f X_n$.

(3) (Exemples) On suppose que $n = 1$ et $k = 1$ (on recolle un disque à un cercle grâce à l'application $z \mapsto z^m$). Quel est le groupe fondamental de l'espace Y obtenu ? Identifier cet espace quand $m = 1$, $m = 2$.

On suppose que $n = 2$, $k = 4$, $j_1 = j_3 = 1$, $j_2 = j_4 = 2$, $m_1 = -m_3 = 1$, $m_2 = -m_4 = 1$. Déterminer l'espace Y et son groupe fondamental.

(4) On revient au cas général. Quel est le groupe fondamental de Y ?

---

(7) L'espace quotient $P/\mathcal{R}$ est une surface de genre 2, comme l'espace X de l'exercice VI.17.

(5) (Question subsidiaire) Soit G le groupe défini (par générateurs et relations) par

$$G = \langle a_1, \dots, a_n; R_1(a_1, \dots, a_n), \dots, R_s(a_1, \dots, a_n) \rangle.$$

Construire un espace topologique connexe par arcs dont le groupe fondamental est G.

***Exercice VI.20* (Groupe fondamental d'un graphe)**. Si K est un graphe connexe fini (exercice III.15), on appelle *connectivité* de K et on note $c(K)$ le plus grand des entiers p pour les quels il existe p arêtes distinctes $A_1, \dots, A_p$ telles que $K - (A_1 \cup \cdots \cup A_p)$ soit connexe. Quelle est la connectivité d'un arbre (exercice IV.8) ? D'un cercle ? D'un huit ? D'un bouquet de n cercles ?

Montrer qu'un graphe de connectivité nulle est simplement connexe (exercice IV.8). Le but de cet exercice est de montrer que, si K est un graphe (fini) connexe de connectivité $c(K)$, alors son groupe fondamental est un groupe libre à $c(K)$ générateurs. La démonstration proposée est par récurrence sur $c(K)$. Supposons donc $c(K) \geq 1$.

(1) Montrer qu'il existe une arête A dans K, d'extrémités s et t, telle que $L = K - A$ soit un graphe connexe de connectivité $c(K) - 1$ et qu'il existe un arbre C contenu dans L, joignant s et t avec $C \cup A$ homéomorphe à S^1.

(2) Soit $z \in A$. Vérifier que L est un rétracte par déformation de $K - \{z\} = U$, de sorte que l'inclusion induit un isomorphisme

$$\pi_1(L, s) \longrightarrow \pi_1(U, s).$$

(3) Construire un ouvert V de K qui soit un voisinage de $C \cup A$, qui en ait le type d'homotopie et qui soit tel que

$$U \cup V = K \text{ et } U \cap V = V - \{z\}\,.$$

(4) En déduire que le groupe fondamental de K est le produit libre de $\pi_1(K, s)$ et de $\pi_1(C \cup A, s)$ et conclure.

Exercice VI.21. Étendre le théorème de l'exercice précédent au cas d'un graphe pas nécessairement fini, en écrivant un graphe K comme réunion d'une suite K_i de graphes finis, avec

$$\pi_1(K_i, x) \longrightarrow \pi_1(K_{i+1}, x)$$

injectif.

Exercice VI.22. On considère l'espace X qui est la réunion des cercles C_n de centres $(\frac{1}{n}, 0)$ et de rayons $\frac{1}{n}$ (voir l'exercice V.16). Montrer que, pour tout entier n, le groupe fondamental de X se projette sur un groupe libre à n générateurs.

***Exercice VI.23* (Théorème de Nielsen-Schreier)**. Soit G un groupe libre à n générateurs. Soit H un sous-groupe de G. Le but de cet exercice est de démontrer que H est un groupe libre, un résultat non trivial[(8)].

Construire un graphe fini connexe de groupe fondamental isomorphe à G. En considérant les revêtements de ce graphe et en utilisant les exercices III.15, VI.20 et VI.21, en déduire le résultat. En cas de besoin, voir [**Hat02**] pour les démonstrations de ces résultats liés aux graphes.

Problèmes universels

Voici une liste de problèmes universels, présentés sous forme d'exercices. Pour une introduction au langage des catégories, dans lequel ces problèmes trouvent une place naturelle, voir [**Zis72**].

***Exercice** *VI.24* (La topologie quotient)**. Exprimer la proposition II-2.1 comme solution d'un problème universel.

(8) Le résultat est vrai sans imposer que le groupe libre G ait un nombre fini de générateurs. Le seul problème est de savoir construire un graphe dont le groupe fondamental est G.

***Exercice* VI.25* (Abélianisé d'un groupe)**. Soit G un groupe. Montrer qu'il existe un groupe abélien G^{ab}, unique à isomorphisme (unique) près et un morphisme $p : G \to G^{\mathrm{ab}}$ tels que, pour tout homomorphisme f de G dans un groupe abélien A, il existe un unique homomorphisme $\bar{f} : G^{\mathrm{ab}} \to A$ tel que $\bar{f} \circ p = f$.

Exercice* VI.26. Montrer que tout groupe est isomorphe à un quotient d'un groupe libre.

***Exercice* VI.27* (Corps de décomposition, clôture algébrique)**. Soit K un corps commutatif et soit P un polynôme à coefficients dans K. Quelles sont les solutions des problèmes universels posés par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, dotted] \arrow[dr] & \widehat{K} \arrow[d, dotted] \\
& E
\end{tikzcd}$$

où les flèches sont des extensions de corps et E est un corps sur lequel P est scindé (premier problème), un corps algébriquement clos (deuxième problème). Supposons le polynôme P irréductible. Écrire un problème universel dont le corps de rupture de P soit solution.

***Exercice* VI.28* (Le produit)**. Étant donnés deux ensembles X et Y, construire un ensemble P muni de deux applications $p_X : P \to X$, $p_Y : P \to Y$ et tel que, pour tout ensemble E muni de deux applications f_X dans X et f_Y dans Y, il existe une unique application $f : E \to P$ telle que $p_X \circ f = f_X$, $p_Y \circ f = f_Y$. Montrer que P est unique (à bijection unique près).

Reprendre la question précédente en remplaçant « ensemble », « application » et « bijection » respectivement par « groupe », « morphisme de groupes » et « isomorphisme de groupes », puis par « espace vectoriel », « application linéaire » et « isomorphisme d'espaces vectoriels », enfin par « espace topologique », « application continue » et « homéomorphisme ».

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, "f_X"] \arrow[ddr, "f_Y"'] & & \\
& P \arrow[r, dotted, "p_X"'] \arrow[d, dotted, "p_Y"] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Généraliser au cas d'un nombre arbitraire d'ensembles (resp. groupes, espaces vectoriels, espaces topologiques).

***Exercice* VI.29* (Le produit fibré)**. Dans cet exercice, X, Y et S sont des espaces topologiques, toutes les applications sont continues. Quelle est la solution du problème universel posé par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, "p"] \arrow[ddr, "q"'] & & \\
& E \arrow[r, dotted] \arrow[d, dotted] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"'] & S
\end{tikzcd}$$

Exercice * ***VI.30*** **(La somme)**. On cherche à résoudre le problème universel posé par le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dotted, "i_X"'] \arrow[ddr, "f_X"] & \\
Y \arrow[r, dotted, "i_Y"] \arrow[drr, "f_Y"'] & S \arrow[dr, dotted, "g"] & \\
& & E.
\end{tikzcd}$$

On suppose d'abord que X, Y et E sont des ensembles. Vérifier que la réunion disjointe $S = X \coprod Y$ est l'unique solution.

On suppose ensuite que X, Y et E sont des espaces topologiques, f_X, f_Y des applications continues (on cherche un espace topologique S et des applications continues i_X i_Y et g). Montrer que la réunion disjointe est encore la solution.

On suppose enfin que X, Y et E sont des espaces vectoriels (resp. des groupes abéliens[9]) et f_X, f_Y des applications linéaires (resp. des homomorphismes de groupes abéliens). Bien sûr, on cherche un espace vectoriel S et des applications linéaires (resp. un groupe abélien et des homomorphismes de groupes). Montrer que la somme directe est solution.

Exercice VI.31 **(Le groupe diédral infini)**. On utilise les notations de l'exemple 4.6. On considère l'application

$$\mathbf{Z}/2 \star \mathbf{Z}/2 \longrightarrow \mathbf{Z}/2$$

qui, associe à chaque mot sa longueur modulo 2. Vérifier que c'est un homomorphisme de groupes et que son noyau est isomorphe à $\mathbf{Z}$ (engendré par x_1x_2). Montrer que $\mathbf{Z}/2 \star \mathbf{Z}/2$ est le groupe engendré par x_1 et x_1x_2, avec les relations $x_1^2 = 1$ et $x_1(x_1x_2)x_1^{-1} = (x_1x_2)^{-1}$.

Exercice VI.32 **(Le groupe modulaire)**. On considère le groupe modulaire défini dans l'exercice II.38. Montrer qu'il existe un homomorphisme surjectif

$$\mathbf{Z}/2 \star \mathbf{Z}/3 \longrightarrow PSL(2; \mathbf{Z}).$$

On peut démontrer que ces deux groupes sont isomorphes (voir [**Ser70**]).

Exercice * ***VI.33*** **(Limite inductive, limite projective)**. On considère une suite de groupes abéliens

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} E_n \xrightarrow{f_n} E_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

où les f_i sont des homomorphismes de groupes. Montrer qu'il existe un groupe abélien, noté $\varinjlim E$, unique à isomorphisme (unique) près, solution du problème universel

$$\begin{tikzcd}
& & & \varinjlim E \arrow[dd, dotted] \\
\cdots \arrow[r] & E_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[urr, dotted] \arrow[drr, bend right] & E_{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, dotted] \arrow[dr] & \cdots \\
& & & A
\end{tikzcd}$$

(on pourra définir $\varinjlim E$ comme un sous-espace de la somme des E_i).

[9] Attention la somme de deux groupes abéliens « dans la catégorie des groupes abéliens » est un groupe abélien, alors que si on fait la somme « dans la catégorie des groupes », comme au § 4, on trouve un groupe non abélien.

De même, si

$$\cdots \xrightarrow{f_{n+1}} E_{n+1} \xrightarrow{f_n} E_n \xrightarrow{f_{n-1}} \cdots$$

est une suite d'homomorphismes de groupes, construire une solution $\varprojlim E$ du problème universel

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim E \arrow[drr, dotted] \arrow[drrr, dotted, bend left] \arrow[dd, dotted] & & & & \\
& \cdots \arrow[r] & E_{n+1} \arrow[r, "f_n"] & E_n \arrow[r] & \cdots \\
A \arrow[urr] \arrow[urrr, bend right] & & & &
\end{tikzcd}$$

à partir du produit des groupes E_i.

***Exercice** *VI.34* (Le produit tensoriel)**. Soient E et F des espaces vectoriels sur un corps K. Montrer qu'il existe un espace vectoriel $E \otimes F$, unique à isomorphisme près et tel que

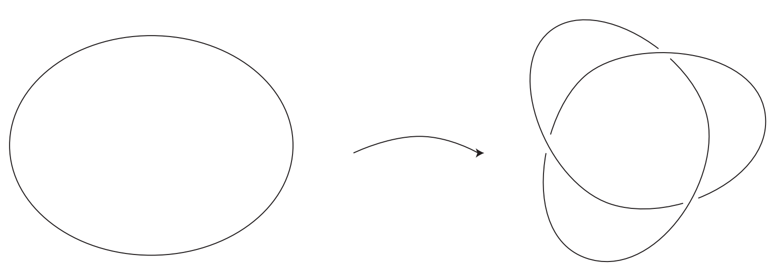
$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[dd, dotted] & \\
& X \\
E \otimes F \arrow[ur, dotted, "\widetilde{\varphi}"'] &
\end{tikzcd}$$

pour toute application *bilinéaire* φ dans un espace vectoriel X, il existe une unique application *linéaire* $\widetilde{\varphi} : E \otimes F \to X$ faisant commuter le diagramme.

CONCLUSION : ET APRÈS

Voici quelques références, quand c'est possible à des livres accessibles, pour des lectures ultérieures. Cette introduction à la topologie et à la topologie algébrique, les exemples de techniques et d'objets rencontrés, devraient inciter les lecteurs à s'intéresser

- aux surfaces, après les exemples de la sphère S^2, du tore, du plan projectif, de la bouteille de Klein et de la surface de genre 2, voir la classification des surfaces dans [**Mas67, Gra71**], ceci amenant
  - plus généralement (en augmentant la dimension) aux variétés et à la géométrie différentielle, voir [**Laf96**],
  - ou[10] (en considérant certaines d'entre elles comme des courbes complexes) aux surfaces de Riemann, voir [**Rey90**],
- aux analogues à fibre non discrète des revêtements, les fibrations, voir [**Sel97**], [**Hat02**], [**Spa66**]. Les relations entre groupe fondamental et revêtements (étudiées ici au chapitre IV) sont importantes elles aussi, dans des situations géométriques plus abstraites, plus rigides, de géométrie algébrique, où il est parfois difficile de définir le groupe fondamental (lacets et homotopie sont des notions bien « molles ») alors que les revêtements et leurs groupes d'automorphismes sont toujours présents... et donc susceptibles de remplacer le groupe fondamental, voir [**Gro70**].
- aux applications du groupe fondamental à des problèmes comme
  - celui traité dans l'exercice VI.12, comme par exemple, de montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme de $\mathbf{R}^3$ dans lui-même envoyant le cercle ordinaire représenté à gauche de la figure ci-dessous sur le cercle « noué » représenté à droite de la même figure, c'est le début de la théorie des nœuds, voir [**Sos99**], une lecture très recommandable,



  - celui abordé dans l'exercice IV.23, monodromie des équations différentielles, voir [**Sab02**], théorie de Galois différentielle, voir par exemple [**Aud01**]
- aux analogues de dimensions supérieures du groupe fondamental, groupes d'homotopie [**Sel97**], [**Hat02**], [**Spa66**], d'homologie [**Zis72**], de cohomologie [**God71**], plus généralement aux outils de topologie algébrique permettant de traiter des problèmes soulevés ou évoqués dans ces notes

[10] Sans exclusive.

– théorèmes de points fixes
– critères de non homéomorphisme
– champs de vecteurs sur les sphères, sphères munies de structures de groupes, voir [**Ada64**].

INDEX

BIBLIOGRAPHIE

[Ada64] J. F. ADAMS – *Stable homotopy theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1964.

[Aud01] M. AUDIN – *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, vol. 8, Société Mathématique de France & EDP Sciences, 2001.

[Car61] H. CARTAN – *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, Paris, 1961.

[FL88] C. FRUTTERO & F. LUCENTINI – *L'amant sans domicile fixe (L'amante senza fissa dimora)*, Seuil, Paris, 1988, Traduit de l'Italien par F. Rosso.

[God71] C. GODBILLON – *Éléments de topologie algébrique*, Hermann, Paris, 1971.

[Gra71] A. GRAMAIN – *Topologie des surfaces*, Presses Universitaires de France, Paris, 1971.

[Gro70] A. GROTHENDIECK – *SGA1, Revêtements étales et groupe fondamental*, Lecture Notes in Math., Springer, 1970, Nouvelle édition, Documents Mathématiques, Société Mathématique de France, à paraître.

[Gui98] D. GUIN – *Algèbre, tome 1, groupes et anneaux*, Espaces34 et Belin, 1998.

[Hat02] A. HATCHER – *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.

[Laf96] J. LAFONTAINE – *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1996.

[Mas67] W. S. MASSEY – *Algebraic topology : an introduction*, Graduate Texts in Math., vol. 56, Springer-Verlag, 1967.

[MT86] R. MNEIMNÉ & F. TESTARD – *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*, Méthodes, Hermann, 1986.

[Mun00] J. MUNKRES – *Topology, Second edition*, Prentice Hall,, 2000.

[Rey90] E. REYSSAT – *Quelques aspects des surfaces de Riemann*, Progress in Math., vol. 77, Birkhäuser, 1990.

[Rud75] W. RUDIN – *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1975.

[Sab02] C. SABBAH – *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, Savoirs actuels, CNRS Éditions & EDP Sciences, 2002.

[Sel97] P. Selick – *Introduction to homotopy theory*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[Ser70] J.-P. Serre – *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[Ska01] G. Skandalis – *Topologie et analyse*, Dunod, Paris, 2001.

[Sos99] A. Sossinsky – *Nœuds (genèse d'une théorie mathématique)*, Science ouverte, Seuil, Paris, 1999.

[Spa66] E. H. Spanier – *Algebraic topology*, Springer-Verlag, New York, 1966.

[Val45] G. Valiron – *Équations Fonctionnelles. Applications*, Masson et Cie, Paris, 1945.

[Zis72] M. Zisman – *Topologie algébrique élémentaire*, Armand Colin, Paris, 1972.