M1F Topologie

Exercice 1 Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ un des espaces topologiques suivants

1. un triangle
2. une droite
3. union de deux droites non-parallèles
4. le graphe $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ d'une fonction continue
5. le circle $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

Est-ce que S est une variété topologique, une variété différentielle, une sous-variété différentielle ?

Exercice 2 Montrer que la sphère $S^n = \{(x_0, x_1, ..., x_n \in \mathbb{R} : x_0^2 + x_1^2 + ...x_n^2 = 1\}$ est une variété différentielle et construire un atlas. Montrer qu'on peut construire un atlas de deux cartes. Existe-t-il un atlas d'une carte ?

Exercice 3 Soit $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n, N > n$ une application de classe C^1 et soit $M = g^{-1}(0)$. Montrer que si quelque soit $a \in M$ le rang de $D(g)(a)$ est égale à n, alors M est une sous-variété différentielle.

Exercice 4 Trouver une condition sur les racines du polynôme P, pour que l'ensemble $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 = P(x)\}$ soit une sous-variété complexe analytique, une sous-variété différentielle (réelle).

Exercice 5 (**Groupes opérant sur un ensemble.**)
Soit G un groupe multiplicatif muni d'une topologie séparée $\mathcal{T}$. On dit que $(G, \mathcal{T})$ est un groupe topologique si les opérations $(x, y) \mapsto xy$ et $x \mapsto x^{-1}$ sont continues respectivement de $G \times G$ dans G et de G dans G. Soit X un espace topologique, G un groupe topologique opérant continûment sur X, *i.e.* l'application $(g, x) \mapsto g \cdot x$ de $G \times X$ dans X est continue.

1. Montrer que la projection $\pi : X \to X/G$ est ouverte.
   Soit H un sous-groupe de G. Montrer que G/H est séparé ssi H est fermé. Montrer qu'un sous-groupe discret est fermé.
2. **Espaces projectifs réels.** On définit deux relations :
   – d'une part sur $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$: $x\mathcal{R}y$ ssi il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $y = \lambda x$ *i.e.* $G_0 = (\mathbb{R}^*, \times)$.
   – d'autre part sur $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, \|x\| = 1\}$: $x\mathcal{A}\dagger$ ssi $y = \pm x$ (antipodie) *i.e.* $G_1 = (\{\pm 1\}, \times)$.
   (a) Montrer que $S^n/\mathcal{A}$ et $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathcal{R}$ sont homéomorphes pour les topologies quotients, que les quotients sont séparés et compacts. L'espace $S^n/\mathcal{A}$ (ou $(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\mathcal{R}$) est appelé espace projectif réel et noté $\mathbb{R}P^n$.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est une variété différentielle.

(c) Montrer que $\mathbb{R}P^n$ est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant à $\mathbb{R}P^{n-1}$ une boule B^n au moyen de la projection $q : S^{n-1} = \partial B^n \to \mathbb{R}P^{n-1}$.

(d) Montrer que $\mathbb{R}P^1$ est homéomorphe à S^1.

Exercice 6 Ruban de Möbius et cylindre.

1. Soit $X = \mathbb{R}\times]-1,1[$ et $G = \mathbb{Z}$. On définit l'action de G sur X par

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \to & X \\ ((x,y),n) & \mapsto & (x+n,(-1)^n y) \end{array}$$

Montrer que $\mathcal{M} = X/G$ est homéomorphe à $M = f(]-R,R[\times\mathbb{R})$ où $0 < |r| < R < 1$ et

$$f(r,\theta) = [(1 + r\cos(\theta/2))\cos\theta, (1 + r\cos(\theta/2))\sin\theta, r\sin(\theta/2)]$$

L'espace M est appelé ruban de Möbius, voir
`http://www.mathcurve.com/surfaces/mobius/mobius.shtml`

2. Donner une définition analogue du cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ en terme de quotient.
3. Montrer que la bande de Möbius et le cylindre compact $[-R,R]\times S^1$ ne sont pas homéomorphes.
4. Montrer que le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant à la bande de Möbius B une boule B^2 au moyen d'un homéomorphisme de S^1 sur ∂B.

Exercice 7 En identifiant les côtés opposés d'un rectangle avec inversion du sens on obtient un cylindre, un ruban de Mobius, un tore, une bouteille de Klein, un espace projectif.
On coud 2 côtés opposés dans le même sens : on obtient un ruban simple (ou un cylindre tronqué). On coud 2 côtés opposés dans le sens contraire : on obtient un ruban de Mobius. On coud les côtés opposé entre eux dans le même sens : on obtient un tore. On coud les côtés opposés , un couple dans le même sens, l'autre en sens contraire : on obtient une bouteille de Klein. On coud les côtés opposés en sens contraires : on obtient un plan projectif.
Identifier chacun des espaces topologiques ci-dessus à $\mathbb{R}^2/G$ où G est un sous groupe discret de $E(2)$ - le groupe d'isometries du plan. En déduire que l'espace en question est une variété différentielle.