Table des matières

Proposition de synopsis pour le module UE8

Remarques générales. Le but est de donner un niveau de détail intermédiaire entre le syllabus présent sur le site “enseignements” du département et le futur polycopié. Il semble que la rédaction de ce polycopié est obligatoire, il faudra que l’on se la répartisse.

Ci-dessous, outre les contenus (énoncés, modes d’emplois, exercices) je donne des indications de durée, afin que nous restions synchrones. En effet, nous aurons des contrôles continus communs. Il y en aura trois, correspondant en gros à des périodes de quatre semaines. Les deux premiers (fin octobre et fin novembre) auront lieu un samedi matin, date et durée à préciser.

Comme il n’est pas certain (!!!!!!!!) que mes estimations de durée tiennent la route, on pourra les compléter par un procédé que les anciens connaissent bien : toutes les une ou deux semaines, le responsable du module (c.-à-d. moi) dit à tout le monde où il en est, ce qui permet à tout le monde de se caler. Les canards du jardin des plantes le font aussi, ça pourrait marcher ...

Dernière remarque, pas innocente. J’ai participé (ainsi que d’autres toulousains d’ailleurs) à l’élaboration d’un livre pour le L1 que je trouve excellent. Je me suis lourdement appuyé dessus. Je le cite comme référence des différents chapitres sous le nom de “L1, module ...” (dans cette collection, les chapitres sont appelés modules).
“Mathématiques. Tout-en-un pour la Licence. Niveau L1” sous la direction de Jean-Pierre Ramis et André Warusfel, Dunod.
Je ferai de la publicité pour ce livre auprès des étudiants. Il coûte 49 euros pour près de 900 pages. Le L2 est sorti en août (52 euros, près de 1200 pages), et nous espérons sortir le L3 (en deux volumes) pour la rentrée 2008.

Conventions.
Dans ce qui suit, les *mots en italiques* sont ceux que l’on est en train de définir.
J’emploie le symbole := lorsqu’une égalité sert à définir le membre gauche à partir du membre droit. Par exemple :
On appelle *carré* du réel x le réel $x^2 := x.x$.
On peut aussi introduire un terme sans définition complète et sans que sa connaissance soit exigible : on le mettra plutôt entre guillemets.

À propos du module UE8. Tous les étudiants qui suivent le module UE8 suivent par ailleurs le module UE2, qui est assez terre-à-terre (consolidation des acquis du secondaire). *A contrario*, on adopte ici un ton plus mathématicien : mise en avant des fondements (axiomes et définitions), des concepts abstraits, des démonstrations. D’où l’idée de commencer par la théorie des ensembles, qui est idéale pour la pratique du raisonnement “pur”.

D’un autre côté, il n’est pas question de se contraindre à un exposé totalement linéaire : on tire les exemples de toute la culture antérieure des étudiants, on admet les résultats dont la preuve nous entrainerait trop loin (*mais on le dit*), on ne résout pas toutes les difficultés logiques ...

1 Relations binaires

Référence pour ce chapitre : le module I.1 du L1, sections 1, 2, 5, partie de 4 et 6.

Avant de parler de relations binaires, il est nécessaire de parler d'ensembles ; avant de parler de dénombrements, il est nécessaire de parler d'applications. On ne fonde pas toute la théorie, mais on montre comment elle peut être fondée. La logique n'est pas abordée à part, mais on essaye de bien mettre en lumière la structure des démonstrations et les règles de manipulation des symboles logiques (en particulier, de l'implication et de l'équivalence logique d'une part, des quantificateurs d'autre part).

1.1 Ensembles et applications (une semaine et demie)

1.1.1 Ensembles et éléments

Il y a des ensembles et des éléments. (Dans la théorie totalement formalisée de Bourbaki, tout est ensemble.) Il y a la *relation d'appartenance* noté $x \in E$. Sa négation est notée : $x \notin E$.

Axiome d'extensionalité : pour que deux ensembles soient égaux, il faut, et il suffit, qu'ils aient les mêmes éléments.

$$(\forall x \ , \ x \in E \Leftrightarrow x \in F) \Longleftrightarrow (E = F).$$

Noter que l'implication de droite à gauche est une vertu purement logique de l'égalité : si $E = F$, alors toute propriété satisfaite par E (p. ex. contenir x) est satisfaite par F.

La *relation d'inclusion* entre ensembles est définie par :

$$E \subset F \Longleftrightarrow (\forall x \ , \ x \in E \Rightarrow x \in F),$$

i.e. E est inclus dans F si tout élément de E est élément de F. Cette relation est évidemment *réflexive* et *transitive* (ce sont en fait de pures vertus logiques de l'implication). Elle est de plus *antisymétrique*, ce qui est une conséquence de l'axiome d'extensionalité. (Le démontrer.)

Axiome de l'ensemble vide : Il y a un ensemble sans élément, appelé *ensemble vide* et noté $\emptyset$:

$$\forall x \ , \ x \notin \emptyset.$$

D'après l'axiome d'extensionalité, cet ensemble est unique : tout ensemble sans élément lui est égal. (Le démontrer.)

Axiome du singleton : Pour tout élément a, il existe un ensemble ayant a pour seul élément, appelé *singleton* et noté $\{a\}$ (lire "singleton a") :

$$\forall x \ , \ x \in \{a\} \Leftrightarrow x = a.$$

D'après l'axiome d'extensionalité, cet ensemble est unique : tout ensemble ayant ce seul élément lui est égal. (Le démontrer.)

Axiome de la paire : Soient a, b deux éléments (non nécessairement distincts). Il existe un ensemble dont les seuls éléments sont a et b. On le note $\{a, b\}$.

$$\forall x\ ,\ x \in \{a, b\} \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = b.$$

D'après l'axiome d'extensionalité, cet ensemble est unique : tout ensemble ayant ces seuls éléments lui est égal. (Le démontrer.) Si $a \neq b$, on l'appelle *paire formée de a et b*. Et si $a = b$?

Pseudo-axiome définition en extension : Il s'agit d'une commodité pour abréger ce mode d'exposition pas à pas en shuntant une partie de la théorie. Chaque fois que l'on se donne des objets $a_1, \ldots, a_n$, il existe un ensemble dont les seuls éléments sont $a_1, \ldots, a_n$ (d'après l'axiome d'extensionalité, il est unique). Cet ensemble est noté $\{a_1, \ldots, a_n\}$. On dit que l'on a défini cet ensemble *en extension*, c'est-à-dire en énumérant ses éléments.

Généralisation de la définition en extension : Chaque fois que l'on se donne des objets $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ en nombre indéfini mais avec une "règle de construction" connue, certains axiones de la théorie que nous ne détaillerons pas permettent de prouver qu'il existe un ensemble dont les seuls éléments sont $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ (d'après l'axiome d'extensionalité, il est unique). Cet ensemble est noté $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ ou bien (plus loin dans la théorie) $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. On dit encore que l'on a défini cet ensemble *en extension*, c'est-à-dire en énumérant ses éléments.

Exercices :

1. Montrer que les ensembles $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ sont deux à deux distincts.
2. Que dire de la relation $E \subset F$ lorsque E ou F est l'ensemble vide ? un singleton ?
3. Montrer que $\{a, b\} = \{b, a\}$. Est-ce un singleton ?
4. Montrer que $\{a, \{a, b\}\} = \{a', \{a', b'\}\}$ si, et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$.
5. Reconnaitre l'ensemble $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$. Le décrire sous la forme $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$.

1.1.2 Définition en compréhension

Soit $P(x)$ un "prédicat", c'est-à-dire une propriété d'un argument variable x. On dit que ce prédicat est *collectivisant* si les éléments x tels que $P(x)$ est vérifié forment un ensemble, autrement dit, s'il existe E tel que :

$$\forall x\ ,\ x \in E \Leftrightarrow P(x).$$

Il découle de l'axiome d'extensionalité que l'ensemble E est alors unique. On le note :

$$E := \{x \mid P(x)\},$$

ce que l'on lit (lonlère) "ensemble des x tels que $P(x)$".

Le prédicat $P(x) := (x = a)$ est collectivisant. De même les prédicats $(x = a \text{ ou } x = b)$ et $x \neq x$.

Théorème : Le prédicat $x \notin x$ n'est pas collectivisant.

Axiome de la réunion : Si E et F sont des ensembles, le prédicat ($x \in E$ ou $x \in F$) est collectivisant et définit la *réunion* (ou l'*union*) de E et de F :

$$E \cup F := \{x \mid x \in E \text{ ou } x \in F\}.$$

Il découlera de l'axiome de séparation (plus loin) que les prédicats ($x \in E$ et $x \in F$) et ($x \in E$ et $x \notin F$) sont collectivisants et définissent respectivement l'*intersection* $E \cap F$ et la *différence* $E \setminus F$.

Axiome de séparation : Un ensemble E et un prédicat $P(x)$ sont fixés. On suppose que $P(x)$ est défini pour tout élément x de E. Alors le prédicat ($P(x)$ et $x \in E$) est collectivisant. On note :

$$\{x \in E \mid P(x)\} := \{x \mid P(x) \text{ et } x \in E\}.$$

De manière générale, il sera préférable d'employer cette construction pour définir un ensemble. (De même, les quantificateurs $\forall x \in E \;, \; \cdots$ et $\exists x \in E \;:\; \cdots$ sont préférables aux quantificateurs $\forall x \;, \; \cdots$ et $\exists x \;:\; \cdots$ sans mention de domaine.)

Axiome de l'ensemble des parties : On appelle *partie* ou *sous-ensemble* d'un ensemble E un ensemble $F \subset E$. L'axiome dit que les parties de E forment un ensemble, autrement dit, que le prédicat $x \subset E$ est collectivisant. On définit ainsi l'*ensemble des parties de* E :

$$\mathcal{P}(E) := \{x \mid x \subset E\}.$$

Pour le dernier axiome, on commence par une construction non-ensembliste. On admet qu'à deux éléments quelconques a, b on saut associer le *couple* (a, b), qui obéit à la règle suivante :

$$\forall a \;, \; \forall b \;, \; \forall a' \;, \; \forall b' \;, \; (a, b) = (a', b') \Longleftrightarrow a = a' \text{ et } a' = b'.$$

Le couple (a, b) n'est donc pas la paire $\{a, b\}$. Une construction possible est de poser : $(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$.

Axiome du produit : Étant donnés deux ensembles E et F le prédicat ($\exists a \in E \;:\; \exists b \in F \;:\; x = (a, b)$) est collectivisant. Il définit l'*ensemble produit* (ou encore *produit cartésien*) de E et F :

$$E \times F := \{(a, b) \mid a \in E, b \in F\}.$$

On a allégé la notation du membre droit. Il est d'usage d'identifier l'ensemble $E \times (F \times G)$ et $(E \times F) \times G$ et de noter :

$$E \times F \times G := \{(a, b, c) \mid a \in E, b \in F, c \in G\}.$$

Les (a, b, c) sont appelés triplets. Il peut y avoir des difficultés dues au fait que la "première composante" de $(a, (b, c)) \in E \times (F \times G)$, de $((a, b), c) \in (E \times F) \times G$ et de $(a, b, c) \in E \times F \times G$ sont respectivement a, (a, b) et a (problème analogue pour la deuxième composante). On affrontera ces difficultés à l'aide du bon sens.

Pour distinguer les triplets, quadruplets, quintuplets des triplés, quadruplés et quintuplés, remarquer que les premiers font moins de bruits mais les derniers sont plus mignons.

Exercices :

1. Le prédicat $x = x$ est-il collectivisant ?
2. Quel axiome est nécessaire pour montrer que le prédicat $(x \in E)$ est collectivisant ?
3. Calculer l'ensemble des parties de $\emptyset$, de $\{a\}$, de $\{a, b\}$.
4. Comparer $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$; $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$; $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

1.1.3 Calcul booléen

Il s'agit des propriétés de l'ensemble des parties d'un ensemble lorsqu'on le munit des deux lois de composition internes $\cap$ et $\cup$ et de la relation d'ordre $\subset$. On commence par des règles qui sont valables pour des ensembles quelconques :

$$\begin{array}{rcl}
E \cup (F \cup G) & = & (E \cup F) \cup G \text{ (associativité de la réunion)} \\
E \cup F & = & F \cup E \text{ (commutativité de la réunion)} \\
\emptyset \cup E = E \cup \emptyset & = & E \text{ (l'ensemble vide est neutre pour la réunion)} \\
E \cup E & = & E \text{ (tout ensemble est idempotent pour la réunion)} \\
E \cap (F \cap G) & = & (E \cap F) \cap G \text{ (associativité de l'intersection)} \\
E \cap F & = & F \cap E \text{ (commutativité de l'intersection)} \\
\emptyset \cap E = E \cap \emptyset & = & \emptyset \text{ (l'ensemble vide est absorbant pour l'intersection)} \\
E \cap E & = & E \text{ (tout ensemble est idempotent pour l'intersection)} \\
E \cap (F \cup G) & = & (E \cap F) \cup (E \cap G) \text{ (distributivité de l'intersection par rapport à la réunion)} \\
E \cup (F \cap G) & = & (E \cup F) \cap (E \cup G) \text{ (distributivité de la réunion par rapport à l'intersection),} \\
E \subset F & \Longleftrightarrow & E \cap F = E, \\
E \subset F & \Longleftrightarrow & E \cup F = F.
\end{array}$$

La série suivant est valable à l'intérieur de $\mathcal{P}(E)$. On commence par définir, pour toute partie F de E, le *complémentaire de F dans E* : $\complement_E(F) := E \setminus F$. Voici les règles :

$$\begin{array}{rcl}
E \cap F = F \cap E & = & F \text{ (l'ensemble } E \text{ est neutre pour l'intersection)} \\
E \cup F = F \cup E & = & E \text{ (l'ensemble } E \text{ est absorbant pour la réunion)} \\
\complement_E(\complement_E F) & = & F \text{ (involutivité du passage au complémentaire)} \\
\complement_E(F \cup G) & = & (\complement_E F) \cap (\complement_E G) \text{ (le passage au complémentaire est un morphisme } \cup \to \cap) \\
\complement_E(F \cap G) & = & (\complement_E F) \cup (\complement_E G) \text{ (le passage au complémentaire est un morphisme } \cap \to \cup)
\end{array}$$

Exercices :

1. Étude des propriétés de la différence symétrique $F \oplus G := (F \setminus G) \cup (G \setminus F) = (F \cup G) \setminus (F \cap G)$.
2. On pose $F \star G := \complement_E(F \cap G)$. Montrer que toutes les opérations définies dans $\mathcal{P}(E)$ (y compris la complémentation) peuvent se définir à partir de celle-là.

1.1.4 Applications

On ne cherche pas à définir ce qu'elles sont. Une application $f : E \rightarrow F$ a une *source*, ou *ensemble de départ* E et un *but*, ou *ensemble d'arrivée* F (ce sont des ensembles). À tout $x \in E$ elle associe son *image* $f(x) \in F$. Il y a un *axiome d'extensionalité* qui dit que deux applications f et g sont égales si, et seulement si, elles ont même source (mettons E), même but, et : $\forall x \in E\ ,\ f(x) = g(x)$. Avec cette convention, l'application sin de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ et l'application sin de $\mathbf{R}$ dans $[-1, 1]$ ne sont pas les mêmes (malgré l'ambiguïté de la notation) : d'ailleurs, l'une est surjective et pas l'autre. On doit donc définir ici la *restriction* de f à $E' \subset E$; et la *corestriction* de f à $F' \subset F$ (possible sous condition).

Définitions et notations importantes : application identité, composée de deux applications ; antécédent, application injective, surjective, bijective ; réciproque d'une application bijective ; propriétés de base liées à ces notions.

Définir aussi $\Im f$, plus généralement $f(E')$ où $E' \subset E$, l'image réciproque $f^{-1}(F')$, où $F' \subset F$, liens avec $\cup$, $\cap$ et $\subset$ (enparticulier : l'image réciproque "se comporte mieux" que l'image directe).

Axiome : Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Notons $G_f := \{(x, y) \in E \times F \mid y = f(x)\} \subset E \times F$ le *graphe* de f. L'application f est totalement déterminée par son graphe ; autrement dit, l'application $f \mapsto G_f$ est injective de $\mathcal{F}(E, F)$ dans $\mathcal{P}(E \times F)$.

On admet temporairement que l'on sait ce que sont 0 et 1 (mettons des symboles, ou des booléens au sens de la logique, ou des bits). Si l'on fixe un ensemble E, chaque sous-ensemble $F \subset E$ est entièrement déterminé par sa *fonction caractéristique* :

$$\begin{cases} \chi_F : E \rightarrow \{0, 1\}, \\ x \mapsto \chi_F(x) := \begin{cases} 1 \text{ si } x \in F, \\ 0 \text{ si } x \notin F. \end{cases} \end{cases}$$

Théorème : L'application $F \mapsto \chi_F$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ sur $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$. L'application réciproque associe à ϕ son *support* $\phi^{-1}(1)$.

Théorème (Cantor) : Quelque soit l'ensemble E, il n'existe pas d'application surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$. Plus précisément, pour tout $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$, l'ensemble $\{x \in E \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E)$ n'est pas dans l'image de f.

Exercices :

1. Montrer que $f : E \rightarrow F$ est surjective si, et seulement si, elle admet une *section*, c.à-d. une application $s : F \rightarrow E$ telle que $f \circ s = \mathrm{Id}_F$.
2. Montrer que $f : E \rightarrow F$ est injective si, et seulement si, elle admet une *rétraction*, c.à-d. une application $r : F \rightarrow E$ telle que $r \circ f = \mathrm{Id}_E$.
3. On suppose que $E := \{1, \ldots, n\}$. Intepréter les fonctions caractéristiques comme des "vecteurs de bits". Quelles opérations sur ces vecteurs codent les opérations booléennes sur $\mathcal{P}(E)$?

4. Interpréter le théorème de Cantor en termes de vecteurs de bits : on retrouve le "procédé diagonal". (Voir l'annexe page 16.)

1.2 Relations binaires (une semaine et demie)

1.2.1 Vocabulaire

Une relation est un "prédicat" portant sur un ou plusieurs arguments : $P(x)$ (prédicat simple, ceux que l'on a abordés jusqu'ici), $R(x, y)$ (relation binaire), $S(x, y, z)$ (relation ternaire), etc. Exemple : "x, y, z sont premiers entre eux dans leur ensemble" est une relation ternaire.

Une relation binaire $R(x, y)$ qui n'est définie que pour $x \in E$, $y \in F$, s'appelle *correspondance* entre E et F. Il lui est associé un *graphe* $G_R := \{(x, y) \in E \times F \mid R(x, y)\}$. Par exemple, on peut poser $R(x, y) := (y = f(x))$, où $f : E \to F$ est une application. De même, $x \in y$ définit une correspondance entre E et $\mathcal{P}(E)$.

Une relation binaire $R(x, y)$ qui n'est définie que pour $x, y \in E$ s'appelle *relation binaire sur* E. On rencontre principalement (mais pas uniquement) de telles relations. Exemples : $x \leq y$ est une relation binaire sur $\mathbf{R}$; $x \mid y$ (divisibilité) est une relation binaire sur $\mathbf{N}$; $x \equiv y \pmod{a}$ (congruence) est une relation binaire sur $\mathbf{Z}$; $x \subset y$ est une relation binaire sur $\mathcal{P}(E)$.

Propriétés classiques : réflexivité, symétrie, transitivité, antisymétrie.

Clôture transitive, clôture transitive réflexive.

Facultatif : On peut envisager la notion de graphe décrivant une relation (au sens de la théorie des graphes), la matrice d'adjacence, l'interprétation et le calcul de la clôture transitive réflexive (parties accessibles).

Exercices :

1. Vérifier que toute partie de $E \times F$ est le graphe d'une correspondance.
2. Soit $E = \{a, b, c, d\}$. Soit R une relation dont le graphe est $G = \{(a, b), (b, c)\}$. Déterminer sa clôture transitive réflexive.

1.2.2 Relations d'équivalence

Une *relation d'équivalence* est une relation réflexive, symétrique, transitive. Par exemple, l'égalité est une relation d'équivalence (pas sur un ensemble !), la congruence modulo a est une relation d'équivalence sur $\mathbf{Z}$.

Soit $x \sim y$ une relation d'équivalence sur l'ensemble E. On appelle *classe d'équivalence de* $x \in E$ et l'on note $\mathrm{Cl}(x)$ l'ensemble des éléments de E équivalents à x :

$$\mathrm{Cl}(x) := \{y \in E \mid y \sim x\}.$$

Tout élément d'une telle classe est appelé *un représentant* de la classe. On appelle *ensemble de représentants* une partie qui contient exactement un représentant de chaque classe, *i.e.* $F \subset E$ telle que $\forall x \, , \; \mathrm{Cl}(x) \cap F$ est un singleton. Exemples :

pour la congruence modulo a sur $\mathbf{Z}$, l'ensemble $0, \ldots a-1$; pour la congruence modulo 2π sur $\mathbf{R}$, chacun des intervalles $]-\pi, \pi]$ et $[0, 2\pi[$, mais pas les intervalles $[0, 2\pi]$ et $]0, 2\pi[$.

Les classes d'équivalence forment une *partition* de E : elles sont non vides, deux à deux disjointes et leur réunion est E. Réciproquement, toute partition $(E_i)_{i \in I}$ de E provient d'une relation d'équivalence définie par : $x \sim y$ si, et seulement si, x et y sont dans le même E_i. Remarquer l'usage "intuitif" de la notation $(E_i)_{i \in I}$ pour une famille de parties : on ne fondera pas la notion de famille, il faudra guider l'usage.

On veut savoir dans quelle mesure on peut travailler avec des objets "connus à équivalence près" : par exemple, peut-on calculer avec l'argument d'un complexe qui n'est qu'un réel "connu à 2π près", ce qui signifie "connu à congruence modulo 2π près". Peut-on calculer le double d'un argument, sa moitié, etc ? On constate que le double d'un argument est bien défini (il ne dépend pas du représentant choisi pour le calculer), mais pas sa moitié. En tout cas, celle-ci n'est ni un réel ni un argument ... Notant $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ l'ensemble des arguments (notation qui sera expliquée une autre année), on en tire l'existence d'une application $\overline{\theta} \mapsto \overline{2\theta}$ de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ dans lui même (on abrège $\overline{\theta} := \theta \pmod{2\pi}$) ; ou encore la possibilité d'additionner les arguments ; mais pas celle de les diviser par 2, ni de les multiplier entre eux.

Dans ce qui suit, on fixe E muni de la relation d'équivalence $x \sim y$. La classe de $x \in E$ est notée $\overline{x}$. On dira que x (ou tout $y \sim x$) est un représentant de la classe $\overline{x}$, etc. On notera $\overline{E}$ ou$E/\sim$ l'ensemble des classes, que l'on appellera *ensemble quotient de E par la relation d'équivalence $\sim$* :

$$\overline{E} := E/\sim := \{\overline{x} \mid x \in E\}.$$

Il est certain que cet ensemble existe et que c'est une partie de $\mathcal{P}(E)$ (*i.e.* un ensemble de parties de E). On note $p : E \to \overline{E}$ l'application qui, à tout élément, associe sa classe (elle est évidemment surjective).

Il n'est pas judicieux dans ce type de raisonnement de se polariser sur le fait que $\overline{x}$ est un ensemble et que $x, y, \ldots$ en sont des éléments. Il vaut mieux penser à $\overline{x}$ comme à x "incomplètement connu", avec la seule règle : $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x \sim y$ et la seule méthode : pour tout calcul sur une classe, on commence par en choisir un représentant, puis on vérifie à la fin que le calcul ne dépend pas du choix arbitraire du représentant.

On commence par le cas de $f : E \to F$. On veut savoir s'il est possible de définir $\overline{f} : \overline{E} \to F$ par la formule :

$$\overline{f}(\overline{x}) := f(x).$$

Pour que ce soit possible, il faut, et il suffit, que le membre de droite de l'égalité ne dépende pas du choix du représentant x de $\overline{x}$, autrement dit, que :

$$\forall x, y \in E\ ,\ \overline{x} = \overline{y} \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

De manière équivalente :

$$\forall x, y \in E \ , \ x \sim y \Longrightarrow f(x) = f(y).$$

On dit alors que *la relation* $\sim$ *et l'application* f *sont compatibles.* Dans ce cas, $\overline{f}$ existe (et est uniquement déterminé) et l'on dit que f *passe au quotient en* $\overline{f} : \overline{E} \to F$. Noter que cela signifie que $f = \overline{f} \circ p$ (on peut faire le "diagramme commutatif" correspondant).

Corollaire : On suppose que E est muni de la relation d'équivalence $\sim$ et F de la relation d'équivalence $\equiv$, et que $f : E \to F$ est telle que : $\forall x, y \in E \ , \ x \sim y \Longrightarrow f(x) \equiv f(y)$. Alors f passe au quotient en $\overline{f} : \overline{E} \to \overline{F}$.

De la même manière, on est conduit à se demander si une loi de composition $\star$ sur E passe au quotient en une loi $*$ sur $\overline{E}$, définie par la formule :

$$\overline{x} * \overline{x'} := \overline{x \star x'}.$$

La condition nécessaire et suffisante est que *la relation* $\sim$ *et la loi de composition* $\star$ *soient compatibles*, autrement dit :

$$\forall x, x', y, y' \in E \ , \ x \sim y \text{ et } x' \sim y' \Longrightarrow x \star x' \sim y \star y'.$$

Dans ce cas, la loi de composition $*$ existe (et est uniquement déterminée) et l'on dit que *la loi de composition* $\star$ *passe au quotient en la loi de composition* $*$.

Exercices :

1. Montrer que $\theta \mapsto e^{\mathrm{i}\theta}$ induit une bijection de $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{U}$.
2. Appliquer le corollaire à la dfivision par deux d'un argument.
3. D'où vient l'unicité de $\overline{f}$ et de $*$?
4. Reconnaitre en $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ un ensemble quotient. Définir l'addition et la multiplication sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Écrire les tables lorsque $n = 3$.
5. Pour une loi de composition, il suffit de vérifier la compatibilité à gauche et la compatibilité à droite.

1.2.3 Relations d'ordre

Une *relation d'órdre* est une relation réflexive, antisymétrique, transitive. Par exemple, l'inclusion est une relation d'ordre (pas sur un ensemble !), la relation $x \leq y$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{R}$, la relation $x|y$ est une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$ (mais pas sur $\mathbf{Z}$).

Si $x \preceq y$ est une relation d'ordre, on définit *l'ordre strict asocié* par :

$$x \prec y \Longleftrightarrow x \preceq y \text{ et } x \neq y.$$

C'est une relation transitive et antiréflexive (*i.e.* on n'a jamais $x \prec x$). Réciproquement, de toute relation d'ordre strict (transitive et antiréflexive) on déduit une relation d'ordre en posant :

$$x \preceq y \Longleftrightarrow x \prec y \text{ ou } x = y.$$

Définition : ordre total ; exemples, contre-exemples.

Ordre produit, ordre lexicographique (sur un produit de deux ou d'un nombre fini d'ensembles seulement). Cas où l'on part d'ensembles totalement ordonnés.

Majorant, minorant d'un ensemble ; maximum, minimum ; élément maximal, élément minimal ; borne inférieure, borne supérieure ; successeur, prédécesseur (sous-entendu : immédiats). Liens logiques entre ces notions, existences et unicités éventuelles.

Application croissante, décroissante, monotone, strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone. Suite croissante, décroissante, monotone, strictement croissante, strictement décroissante, strictement monotone. (On remarque qu'une suite est, sauf pour la notation, une application de $\mathbf{N}$ dans E.)

Propriétés algébriques. La question de la compatibilité avec une loi de composition ne se traite pas de la même manière dans le cas, par exemple, de l'addition et de la multiplication de $\mathbf{R}$. Dans le cas d'un "groupe commutatif", on imposera la règle suivante :

$$\forall a, b, c \in E \ , \ a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c.$$

On a alors les règles de calcul connues dans $(\mathbf{R}, +)$. Il revient au même de se donner l'ensemble $E_+ := \{x \in E \mid 0 \leq x\}$ des éléments positifs ou nuls, qui est caractérisé par les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{rcl} E_+ + E_+ & \subset & E_+, \\ E_+ \cap (-E_+) & = & \{0\}. \end{array}$$

L'ordre défini par un tel E_+ est total si, et seulement si, $E_+ \cup (-E_+) = E$.

Dans le cas d'un "corps (ou anneau) commutatif" $(E, +, .)$, tel que $(E, +)$ est déjà un groupe ordonné, on imposera la règle suivante :

$$\forall a, b \in E \ , \ 0 \leq a \text{ et } 0 \leq b \Longrightarrow 0 \leq a.b.$$

Si la relation d'ordre a été définie à l'aide de E_+, cela équivaut à la condition :

$$E_+.E_+ \subset E_+. \tag{1}$$

On a alors les règles usuelles de calcul de $(\mathbf{R}, +, .)$.

On est évidemment intéressé par les corps (ou anneaux) *totalement* ordonnés (on leur réserve d'ailleurs l'appellation de *corps ordonnés*). Dans ce cas, on prouve alors les faits suivants : tout carré est positif (on a $x \leq 0$ ou $0 \leq x$ et, dans les deux cas, $0 \leq x^2$) ; -1 n'est pas un carré (en effet, on ne peut avoir $0 \leq -1$ car $0 < 1$). *Il est donc impossible de mettre un ordre sur* $\mathbf{C}$ *qui en fasse un corps ordonné.*

Induction. Un ensemble *noetherien* est un ensemble dans lequel toute suite croissante est stationnaire ; ou bien, de manière équivalente (et on le prouve) : toute partie non vide admet un élément maximal.

Un ensemble *artinien* est un ensemble dans lequel toute suite décroissante est stationnaire ; ou bien, de manière équivalente (et on le prouve) : toute partie non vide admet un élément minimal.

Un ensemble *bien ordonné* est un ensemble totalement ordonné et artinien ; ou bien, de manière équivalente (et on le prouve) : toute partie non vide admet un minimum. Par exemple, $\mathbf{N}$ est bien ordonné, l'ensemble des parties finies de E quelconque est artinien.

Théorème (principe d'induction) : Soit $(E, \preceq)$ un ensemble artinien et soit $P(x)$ un prédicat sur E qui satisfait la propriété d'*hérédité* :

$$\forall x \in E \,\big(\forall y \prec x \ ,\ P(y)\big) \Longrightarrow P(x).$$

Alors :

$$\forall x \in E \ ,\ P(x).$$

Preuve par l'absurde : si $\{x \in E \mid \neg P(x)\}$ est non vide, il admet un minimal, etc. L'exemple de $\mathbf{N}$: pourquoi n'a-t-on pas besoin d'initialiser la récurrence (forte) ?

L'ordre produit sur un produit fini d'ensembles artiniens ; l'ordre lexicographique sur un produit fini d'ensembles bien ordonnés.

Exercices :

1. Dans quel cas un ordre produit est-il total ?
2. Soient E un ensemble totalement ordonné et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'admet pas de plus grand élément. Démontrer : $\forall k \in \mathbf{N}\ ,\ \exists \ell > k \ :\ u_k < u_\ell$.
3. En déduire que, s'il existe un entier p tel que la suite $(u_n)_{n\geq p}$ n'admet pas de plus grand élément, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite strictement croissante.
4. On suppose maintenant au contraire que, quel que soit l'entier p, la suite $(u_n)_{n\geq p}$ admet un plus grand élément et l'on note v_p ce dernier. Démontrer que la suite $(v_p)_{p\in\mathbf{N}}$ est décroissante. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une sous-suite décroissante.
5. Démontrer que toute suite de E admet une sous-suite croissante ou une sous-suite décroissante.

1.2.4 Cardinaux

On dit que deux ensembles E et F sont *équipotents* s'il existe une bijection de E sur F. L'équipotence est une relation d'équivalence, qui signifie “avoir le même nombre d'éléments”, à cela près quel'on n'a pas encore défini le “nombre d'éléments”.

À tout ensemble E on associe un objet appelé *cardinal de* E et noté card E, qui vérifie la propriété suivante :

$$(\text{card } E = \text{card } F) \Longleftrightarrow (E \textit{ est équipotent à } F).$$

(Il ne va pas de soi qu'il existe de tels objets : c'est un axiome.) Exemples :
Le seul ensemble équipotent à $\emptyset$ est lui-même ; son cardinal est noté 0.
Les singletons sont équipotents entre eux. Leur cardinal est noté 1.
Les paires sont équipotentes entre elles. Leur cardinal est noté 2.
(Ces trois cardinaux sont deux à deux distincts.)

On définit la relation suivante entre cardinaux : card $E \leq$ card F s'il existe une application injective de E dans F. Pour que cette définition ait un sens, il faut vérifier qu'en changeant respectivement E et F par des ensembles équipotents E' et F', la propriété est conservée. (On a $i : E \to F$ injective, $u : E \to E'$ bijective et $v : F \to F'$ bijective ; alors $i' : E' \to F'$ est injective, où $i' := v \circ i \circ u^{-1}$.) La relation ainsi définie est évidemment réflexive et transitive.

Théorème (Cantor, Schröder, Bernstein) : la relation $\leq$ entre cardinaux est une relation d'ordre.
Pratiquement, il s'agit de démontrer que, s'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E, alors il existe une bijection entre eux. C'est élémentaire mais compliqué et nous l'admettrons.

On note $<$ la relation d'ordre stricte associée. On voit facilement que $1 < 2$, que pour tout ensemble non vide E, $1 \leq$ card E, que l'on n'a jamais card $E < 0$. On voit aussi que, pour tout ensemble non vide E, on a $0 <$ card E : soit en admettant la notion d'application vide (pourquoi pas ?) soit en le posant comme convention.

Enfin, on remarque la possibilité d'un autre critère : si E et F sont non vides, card $E \leq$ card F équivaut à l'existence d'une surjection de F sur E. Comme $x \mapsto \{x\}$ est une injection de E dans $\mathcal{P}(E)$ et qu'il n'existe pas de surjection, on en déduit que card $\mathcal{P}(E) >$ card E.

Théorème (Cantor) : C'est un ordre total.
On prouve (mais ce n'est pas élémentaire) qu'il existe toujours une injection de E dans F ou une injection de F dans E. Nous l'admettrons.

Opérations sur les cardinaux. Pour additionner des cardinaux, il faut évidemment réunir des ensembles *disjoints*. Or, si E et F sont quelconques, $E \times \{0\}$ et $F \times \{1\}$ leur sont respectivement équipotents (bijections $x \mapsto (x, 0)$ et $y \mapsto (y, 1)$) et sont disjoints (on ne peut avoir $(x, 0) = (y, 1)$). On posera donc card $E +$ card $F :=$ card $(E \times \{0\} \cup F \times \{1\})$. Il faut évidemment vérifier que, si l'on remplace E et F par des ensembles équipotents E' et F', on obtient le même résultat, autrement dit, que $E \times \{0\} \cup F \times \{1\}$ et $E' \times \{0\} \cup F' \times \{1\}$ sont équipotents (ce qui est facile).
On vérifie sans peine que l'addition des cardinaux est commutative et associative et que 0 est élément neutre. On calcule de plus :

$$1 + 1 = 2.$$

On peut ensuite définir les “cardinaux finis” usuels : $3 := 2 + 1$, $4 := 3 + 1$, etc. Nous y reviendrons plus loin.

Pour multiplier les cardinaux, c'est plus simple : on pose $\text{card } E \text{card } F := \text{card } E \times F$. Il faut évidemment vérifier que, si l'on remplace E et F par des ensembles équipotents E' et F', on obtient le même résultat, autrement dit, que $E \times F$ et $E' \times F'$ sont équipotents (ce qui est facile).
On vérifie sans peine que la multiplication des cardinaux est commutative et associative et que 1 est élément neutre et 0 est élément absorbant ($E \times \emptyset$ est vide). La multiplication est distributive par rapport à l'addition. On calcule de plus :

$$2 \times 2 = 4.$$

Il reste l'exponentiation. On pose : $(\text{card } F)^{\text{card } E} := \text{card } \big(\mathcal{F}(E, F)\big)$. Cette définition paraitra plus naturelle après lecture du chapitre 2.

Théorème : On a l'égalité :

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E}.$$

Cela découle de la bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F}(E, \{0, 1\})$.

Cardinaux finis et infinis. On dit qu'un ensemble est *infini* s'il est en bijection avec une partie stricte de lui-même : par exemple, $\mathbf{N}$ avec $\mathbf{N}^*$ ou avec $2\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ avec $\mathbf{N}$, $\mathbf{R}$ avec $\mathbf{R}_+^*$ ou avec $]-1, 1[$, etc. (Ce sont des exemples faciles ; de moins faciles suivront.) On dit qu'un ensemble est *fini* dans le cas contraire. Ces propriétés sont conservées par bijection, on peut donc parler de *cardinaux finis* et de *cardinaux infinis.*

À partir des axiomes que nous avons énoncé, on démontre que les cardinaux $0, 1, \ldots$ sont finis et que ce sont les seuls. Nous les appellerons *entiers naturels* (ce sont eux qui ont servi depuis toujours à compter les troupeaux, les étoiles et les jours avant les vacances).

En revanche, on ne peut en déduire qu'il existe des cardinaux infinis. Il faut pour cela un nouvel axiome, l'axiome de l'infini. Nous le remplacerons par un axiome qui lui est équivalent mais qui est plus commode : les entiers naturels forment un ensemble, noté $\mathbf{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Il est clair que c'est un ensemble totalement ordonné, et la notation suivante a un sens :

$$[\![0, p]\!] := \{0, 1, \ldots, p\}.$$

En fait, on prouve sans trop de difficulté que c'est un ensemble bien ordonné, chaque élément n a un successeur qui est $n + 1$ et chaque élément non nul n a un prédécesseur, qui est noté $n - 1$. De même, on peut retrouver à partir de là toute l'arithmétique élémentaire. *Nous l'admettrons.*

Pour en revenir aux cardinaux finis et infinis, on démontre alors :
L'ensemble $\mathbf{N}$ est infini. Son cardinal est noté $\aleph_0$ (ce qui se lit aleph zéro).
Tout ensemble fini est équipotent à un unique $[\![0, n - 1]\!]$, et n est son cardinal.
Tout ensemble infini a un cardinal $\geq \aleph_0$, autrement dit, $\aleph_0$ est le plus petit cardinal infini.

Ensembles dénombrables. Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est de cardinal $\aleph_0$, c'est-à-dire s'il peut être mis en bijection avec $\mathbf{N}$. Une bijection de $\mathbf{N}$ sur E est appelée une *énumération* de E. Par exemple, on énumère $\mathbf{Z}$ par $n \mapsto n/2$ si n pair, $n \mapsto -(n+1)/2$ si n impair. Donc card $\mathbf{Z} = \aleph_0$. On énumère $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$ par $n \mapsto -(n+1)$. Comme l'ensemble dénombrable $\mathbf{Z}$ est l'union disjointe des ensembles dénombrables $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, on a prouvé :

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

On aurait aussi pu utiliser l'union disjointe $\mathbf{N}$ de $2\mathbf{N}$ et de $2\mathbf{N}+1$.

On peut énumérer $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ en parcourant successivement les ensembles suivants : $\{(0,0)\}$, puis $\{(1,0),(0,1)\}$, puis $\{(2,0),(1,0),(2,2)\}$, etc. On vérifie que l'image de n s'obtient comme suit : on encadre n par $\dfrac{k(k+1)}{2} \leq n < \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, ce qui revient à écrire $n = \dfrac{k(k+1)}{2} + l$, avec $0 \leq l \leq k$. Cette écriture est unique. On associe alors à n le couple $(k-l, l) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$. De cette énumération, on déduit que card $\big(\mathbf{N} \times \mathbf{N}\big) = \aleph_0$. On a prouvé :

$$\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0.$$

Il en découle que, si $(E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'ensembles au plus dénombrables, alors $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} E_n$ est au plus dénombrable : en effet, son cardinal est majoré par $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$. C'est donc soit un ensemble fini soit un ensemble dénombrable (en général, il est facile de trancher).

Cet énoncé est très important en analyse, car, comme on va le voir, $\mathbf{R}$ est infini non dénombrable. Une première conséquence est que tout intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$ est infini non dénombrable (il est en bijection avec $\mathbf{R}$ via la composée de tan et d'une fonction affine), donc aussi tout intervalle non vide et non réduit à un point. À l'inverse, les parties dénombrables de $\mathbf{R}$ sont très petites et très rares (dispersées) : cela sera précisé en topologie et en analyse.

Reste à prouver que $\mathbf{R}$ est infini (c'est évident, il contient $\mathbf{N}$) et non dénombrable. On sait que card $\mathcal{P}(\mathbf{N}) = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$. On obtient une application injective de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ dans $\mathbf{R}$ comme suit : à toute partie $A \subset \mathbf{N}$ on associe $\sum\limits_{a \in A} 10^{-a}$ (réel dont le développement décimal a des 1 aux endroits codés par A, des 0 ailleurs). On en déduit que card $\mathbf{R} \geq$ card $\mathcal{P}(\mathbf{N}) = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$. En fait, on peut montrer que card $\mathbf{R} = 2^{\aleph_0}$, mais c'est un petit peu plus fatigant.

<u>Exercices :</u>

1. Existe-t-il un cardinal plus grand que tous les autres ?
2. Démontrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
3. Soient $\aleph_1$,$\aleph_2$ et $\aleph_3$ trois cardinaux. Démontrer les formules :
$$\big(\aleph_1\aleph_2\big)^{\aleph_3} = \aleph_1^{\aleph_3}\aleph_2^{\aleph_3}, \quad \aleph_1^{\aleph_2+\aleph_3} = \aleph_1^{\aleph_2}\aleph_1^{\aleph_3}, \quad \big(\aleph_1^{\aleph_2}\big)^{\aleph_3} = \aleph_1^{\aleph_2\aleph_3}.$$
4. Montrer que $0, 1, 2$ sont des cardinaux finis. Si $\aleph$ est un cardinal fini, montrer que $\aleph + 1$ aussi.
5. Montrer que $\mathbf{Q}$ est dénombrable.

1.3 Annexe

Voici, pour mémoire, une feuille de TD du DEUG MIAS de 2002-2003.

Exercice 1 - Codage des parties d'un ensemble fini

Dans tout l'exercice, on notera $B = \{0, 1\}$ (*ensemble des "bits"*).

Soit $E = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble à n éléments ($n \geq 1$). A toute partie A de E, on associe son *application caractéristique* :

$$\chi_A \ : \ \begin{cases} E \to B \\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{cases}$$

On peut coder l'application χ_A par un *vecteur de bits* ("bit vector") $V_A = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, où $\epsilon_i = \chi_A(a_i)$. Autrement dit, le i-ème bit ϵ_i est mis à 1 si a_i est élément de A, sinon, il est mis à 0 [1].

1) On prend ici $n = 3$ et $E = \{1, 2, 3\}$. Enumérer toutes les parties de E. Pour chacune, expliciter son application caractéristique ainsi que le vecteur de bits associé. On présentera les résultats sous forme de tableau.

2) a) On se replace dans le cas général (n quelconque). Montrer que l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}(E, B)$ qui à une partie A de E associe sa fonction caractéristique χ_A est bijective. Pour cela, on explicitera son application réciproque.

b) Montrer de même que l'application $\mathcal{P}(E)$ dans B^n qui à une partie A de E associe son vecteur de bits V_A est bijective.

c) En déduire le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

3) a) On note $\overline{0} = 1$ et $\overline{1} = 0$ (*bit complémentaire*) ; autrement dit, $\forall \epsilon \in B$, $\overline{\epsilon} = 1 - \epsilon$. Pour tout vecteur de bits $V = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in B^n$, on note $\overline{V} = (\overline{\epsilon_1}, \ldots, \overline{\epsilon_n})$. A quelle partie de A correspond le vecteur de bits $\overline{V_A}$?

b) Décrire de même le vecteur de bits associé à $A \cup A'$, à $A \cap A'$.

Exercice 2 - Le procédé diagonal de Cantor

1) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^n > n$. En déduire que, pour tout ensemble fini E, il n'existe aucune application surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$.

2) On prend maintenant $E = \{1, \ldots, n\}$. On considère n parties de E, notées $A_1, \ldots, A_n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $V_{A_i} = (\epsilon_{i,1}, \ldots, \epsilon_{i,n})$ le vecteur de bits associé. Puis, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on note $\epsilon'_i = \overline{\epsilon_{i,i}}$. On note enfin $V' = (\epsilon'_1, \ldots, \epsilon'_n)$ et A' l'unique partie de E dont le vecteur de bits associé est V'.

a) Donner un exemple de ces constructions, sous forme de tableau, lorsque $n = 10$.

[1] C'est la méthode utilisée en Pascal (par exemple) pour coder le type ensemble.

b) En général, montrer que A' n'est égal à aucune des parties A_i. On raisonnera par l'absurde : si l'on avait $A' = A_i$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, n\}$, quelle serait la valeur du i-ème bit du vecteur associé à cette partie ?

c) Retrouver ainsi le résultat de la question 1. Indication : si f est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$, on note $A_1 = f(1), \ldots, A_n = f(n)$; on constate alors que la partie A' construite ci-dessus n'appartient pas à l'ensemble image de f.

d) Vérifier que $A' = \{i \in E \;/\; i \notin A_i\}$.

3) On s'inspire ici de la question 2 pour démontrer le théorème suivant : E étant un ensemble *quelconque*, il n'existe aucune application surjective de E sur $\mathcal{P}(E)$. Supposons donc que f est une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. Posons :

$$A' = \{x \in E \;/\; x \notin f(x)\}.$$

a) Vérifier que cette définition a bien un sens.

b) Montrer qu'il n'existe aucun élément x de E tel que $A' = f(x)$. On raisonnera par l'absurde : si l'on avait $A' = f(x)$, aurait-on $x \in A'$ ou $x \notin A'$?

c) Conclure.

d) Pourquoi, dans l'énoncé du théorème, a-t'on précisé que l'ensemble E était "quelconque" ?

Exercice 3 - Passage au quotient pour une application

On définit une relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\mathbf{Z}$ des entiers relatifs par :

$\forall x, y \in \mathbf{Z} \;:\; x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x$ et y ont même parité (autrement dit, ils sont tous deux pairs ou tous deux impairs).

1) Vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

2) On note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de l'entier x et $\overline{\mathbf{Z}}$ l'ensemble quotient de $\mathbf{Z}$ par $\mathcal{R}$ (donc, l'ensemble des classes d'équivalence).

a) Vérifier que $\overline{0} \neq \overline{1}$. Montrer que, quel que soit l'entier x, sa classe $\overline{x}$ est égale à $\overline{0}$ ou à $\overline{1}$.

b) En déduire que $\overline{\mathbf{Z}} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ et que l'ensemble quotient $\overline{\mathbf{Z}}$ a exactement deux éléments.

3) a) Montrer que $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ pair.

b) Soient a, b, c des entiers. On pose $f(x) = ax^2 + bx + c$. Factoriser $f(x) - f(y)$ et en déduire l'implication :

$$\forall x, y \in \mathbf{Z} \;:\; x\mathcal{R}y \Rightarrow f(x)\mathcal{R}f(y).$$

c) En déduire l'existence d'une unique application $\overline{f} : \overline{\mathbf{Z}} \to \overline{\mathbf{Z}}$ telle que, si $y = f(x)$, alors $\overline{y} = \overline{f}(\overline{x})$.

4) Montrer qu'il existe une application g de $\mathbf{Z}$ dans lui-même qui, à un entier x, associe $g(x) = \frac{x^2+x}{2}$. Est-il possible de définir d'une application $\overline{g} : \overline{\mathbf{Z}} \to \overline{\mathbf{Z}}$ telle que, si $y = g(x)$, alors $\overline{y} = \overline{g}(\overline{x})$?

Exercice 4 - Relation d'équivalence définie par une application

Soit f une application de l'ensemble E dans l'ensemble F. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E par :

$$\forall x, y \in E \ : \ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

1) Vérifier que l'on obtient ainsi une relation d'équivalence. Démontrer que la classe d'équivalence de $x \in E$ est $f^{-1}(f(x))$.

2) Soit $\overline{E}$ l'ensemble quotient. Montrer que l'on peut définir $\overline{f}$ de $\overline{E}$ dans F par $\overline{f}(\overline{x}) = f(x)$. Montrer que l'application $\overline{f}$ est injective et qu'elle a le même ensemble image que l'application f.

3) Traiter complètement les deux exemples suivants :

– $E = F = \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + x$.

– $E = \mathbf{R}$, $F = \mathbf{R}^2$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

On précisera dans chaque cas l'ensemble image.

Exercice 5 - Composantes connexes d'un graphe

Arwen, Bilbo, Celebrindal, Dunadan, Eowyn, Frodon, Galadriel, Hurin, Isil, James Bond, Karine, Legolas, Morwen, Nimroth, Onomatopee, Peregrin, Quinine, Radagast, Silmarien, Thorin, Uinen, Voronwe, Wendy, Xerxes, Yavanna et Zorglub sont inscrits en UD Maths et ont leurs propres opinions sur les regroupements souhaitables en TD. Ils soumettent à l'administration la liste de leurs desiderata sous la forme suivante : (A,B), (A,F), (E,P), (G,L), (G,R), (G,T), (C,H), (I,H), (M,H), (S,N), (U,V), (Y,V). Par exemple, la présence de (A,B) dans la liste signifie que Arwen veut être dans le même groupe que Bilbo.

1) Quel est le nombre minimum de groupes de TD qui permet de satisfaire tout le monde ?

2) On cherche plutôt à former des groupes nombreux et petits.

a) Si x est l'un des 26 étudiants ci-dessus, on note $f(x)$ l'ensemble des étudiants qui figurent nécessairement dans le même groupe que x d'après la liste ci-dessus, soit parce que ils ont été demandés par x, soit parce qu'ils ont demandé x. Par exemple, $f(A) = \{B, F\}$ et $f(H) = \{C, I\}$. Ecrire tous les $f(x)$.

b) Montrer que l'on peut former un groupe à un seul élément pour chaque étudiant isolé (c'est à dire tel que $f(x) = \emptyset$), en mettant tous les autres ensemble.

3) On propose l'algorithme suivant de constitution du groupe de TD d'un étudiant donné x_0 :

$groupe := \{x_0\}$

<u>repete</u> $delta := \left(\bigcup_{x \in groupe} f(x) \right) - groupe \ ; \ groupe := groupe \cup delta$

<u>jusque</u> $delta = \emptyset$

a) Executer l'algorithme sur Arwen.

b) Que conclure ?

---

2 Dénombrements (une semaine)

Référence pour ce chapitre : le module II.1 du L1, section 2.

2.0.1 ....

Exercices :

1.
2.
3.

3 Arithmétique élémentaire

3.1 ....

3.1.1 ....

Exercices :

1.
2.
3.

4 Suites numériques

4.1 ....

4.1.1 ....

Exercices :

1.
2.
3.