# Corrigé de la première épreuve de contrôle continu de Maths II

**<u>Exercice 1</u>**

(i) L'ensemble de départ est $\mathbf{Q}$. L'ensemble d'arrivée est $\mathbf{C}$.

(ii) On calcule :

$$z^n = \left(e^{2i\pi m/n}\right)^n = e^{2i\pi m} = 1,$$

puisque $m \in \mathbf{Z}$. Le complexe $z$ est donc une racine $n^{\text{e}}$ de l'unité : $z \in \mu_n$.

(iii) Soit $z \in \mu_n$. D'après le rappel du cours, il existe $k \in \mathbf{Z}$ tel que $z = e^{2ki\pi/n}$. Autrement dit, $z = f(k/n)$. le complexe $z$ admet donc l'antécédent $k/n \in \mathbf{Q}$.

(iv) Pour tout $x$ réel, le module de $e^{2i\pi x}$ est 1, donc $e^{2i\pi x} \in \mathbf{U}$. En particulier, pour $x \in \mathbf{Q}$, on a $f(x) \in \mathbf{U}$. L'ensemble image $\text{Im} f$ est donc inclus dans $\mathbf{U}$.

D'après ce que l'on vient de démontrer, l'ensemble image n'est pas égal à l'ensemble d'arrivée $\mathbf{C}$ : l'application $f$ n'est donc pas surjective. En fait, tout élément $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{U}$ (par exemple $0$, $1 + i$ ...) n'admet pas d'antécédent.

(v) Quel que soit $x \in \mathbf{Q}$, on a $f(x + 1) = f(x)$ en vertu du calcul suivant :

$$f(x + 1) = e^{2i\pi(x+1)} = e^{2i\pi x}e^{2i\pi} = e^{2i\pi x} = f(x).$$

Puisque $x$ et $x + 1$, qui sont différents, ont même image, l'application $f$ n'est pas injective.

(vi) Les éléments de l'image réciproque $f^{-1}(\{-1\})$ sont les $x \in \mathbf{Q}$ tels que $e^{2i\pi x} = -1$, ce qui équivaut à $2i\pi x \equiv i\pi \pmod{2i\pi}$. Comme l'égalité $2i\pi x = i\pi + k(2i\pi)$ équivaut à l'égalité $x = k + 1/2$ et que, pour tout entier relatif $k$, on a $k + 1/2 \in \mathbf{Q}$, on trouve en fin de compte :

$$f^{-1}(\{-1\}) = \{k + 1/2 \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

**<u>Exercice 2</u>**

(i) Pour tout réel $x$, on a $x - x = 0\pi$, donc $x \equiv x \pmod{\pi}$ : la relation est donc réflexive.

Pour tous réels $x, y$, si $x \equiv y \pmod{\pi}$, de l'égalité $x - y = k\pi$ (avec $k \in \mathbf{Z}$), on tire $y - x = (-k)\pi$ (avec $-k \in \mathbf{Z}$), d'où $y \equiv x \pmod{\pi}$ : la relation est donc symétrique.

Pour tous réels $x, y, z$, si $x \equiv y \pmod{\pi}$ et $x \equiv y \pmod{\pi}$, des égalités $x - y = k\pi$ $y - z = l\pi$ (avec $k, l \in \mathbf{Z}$), on tire $x - z = (x - y) + (y - z) = (k + l)\pi$ (avec $k + l \in \mathbf{Z}$), d'où $x \equiv z \pmod{\pi}$ : la relation est donc transitive.

Étant réflexive, symétrique et transitive, cette relation est donc bien une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$.

(ii) Supposons que si $x \equiv y \pmod{\pi}$ et $x' \equiv y' \pmod{\pi}$. On a donc $x - y = k\pi$ (avec $k \in \mathbf{Z}$) et $x' - y' = k'\pi$ (avec $k' \in \mathbf{Z}$). On en déduit :

$$(x + x') - (y + y') = (x - y) + (x' - y') = (k + k')\pi,$$

d'où, puisque $k + k' \in \mathbf{Z}$, la relation $x + x' \equiv y + y' \pmod{\pi}$.

(iii) Soient $x$ un représentant arbitraire de la classe de $\pi/3$ et $x'$ un représentant arbitraire de la classe de $-4\pi/3$. Alors la classe de $x + x'$ ne dépend pas du choix particulier

de ces représentants. En effet, si $y$ est un autre représentant de la classe de $\pi/3$ et $y'$ un autre représentant de la classe de $-4\pi/3$, on a $x \equiv y \pmod{\pi}$ (puisqu'ils sont tous deux représentants de la même classe) et $x' \equiv y' \pmod{\pi}$ (pour la même raison), donc $x + x' \equiv y + y' \pmod{\pi}$ (d'après la question précédente), donc la classe de $x = x'$ est la même que la classe de $y + y'$ : c'est cette classe que l'on considère comme la somme de la classe de $\pi/3$ et de la classe de $-4\pi/3$.
Prenons (au plus simple !) $x = \pi/3$ et $y = -4\pi/3$. On trouve $x + y = -\pi$. La somme de la classe de $\pi/3$ et de la classe de $-4\pi/3$ est donc la classe de $-\pi$. Comme $-\pi \equiv 0 \pmod{\pi}$, c'est aussi la classe de 0.

**Exercice 3**

(i) Quel que soit l'élément $1 - \dfrac{1}{n}$ de $E$, l'élément $1 - \dfrac{1}{n+1}$ de $E$ lui est strictement supérieur : l'ensemble $E$ n'a donc pas de maximum.
L'élément $0 = 1 - \dfrac{1}{1}$ de $E$ est inférieur ou égal à tous les $1 - \dfrac{1}{n}$ : c'est donc le minimum de $E$.
Puisque 0 est le minimum de $E$, c'en est également la borne inférieure.
Pour tout réel $x \geq 1$, on a $x > 1 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ : un tel $x$ est donc un majorant de $E$. En revanche, si $x < 1$, on peut trouver $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x < 1 - \dfrac{1}{n}$ ; cela revient en effet à prendre $n > \dfrac{1}{1-x}$, en vertu des équivalences :

$$x < 1 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < 1 - x \Leftrightarrow n > \frac{1}{1-x},$$

cette dernière transformation étant justifiée par l'inégalité $1 - x > 0$. On en conclut que l'ensemble des majorants de $E$ est égal à la demi-droite $[1, +\infty[$. Le plus petit élément de cette demi-droite est 1, qui est donc la borne supérieure de $E$.
(ii) Pour toute suite décroissante de réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ admet $u_0$ comme maximum. Comme $E$ n'admet pas de maximum, on ne peut avoir $E = \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ pour une telle suite.
La suite $u_n := 1 - \dfrac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbf{N})$ est croissante, et l'on a $E = \{u_n \mid n \in \mathbf{N}\}$.
(On pourrait aussi bien prendre $u_n := 1 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $u_0 = 0$, puisqu'il n'est pas demandé que la suite soit *strictement* croissante.)