Corrigé de la première épreuve de contrôle continu de Maths I

Exercice 1

(i) Lorsque $x = 0$, on a $z = 2$ qui est un réel positif, de module 2 et d'argument 0 $\pmod{2\pi}$.
Lorsque $x = \pi/2$, on a $z = 0$, dont le module est 0 et qui n'a pas d'argument.
(ii) On met $e^{\mathrm{i}x}$ en facteur et l'on utilise l'une des formules d'Euler :

$$z = e^{2\mathrm{i}x} + 1 = e^{\mathrm{i}x}\left(e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}\right) = e^{\mathrm{i}x}\,(2\cos x) = 2\cos x\, e^{\mathrm{i}x}.$$

(iii) Lorsque $x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, on sait que $\cos x$ est strictement positif, donc $2\cos x$ également. D'après la question précédente, le module de z est alors $2\cos x$ et son argument est $x \pmod{2\pi}$.
(Lorsque par exemple $x = \pi$, on a $2\cos x = -2$, qui n'est certainement pas le module de z ; et $z = 2$, dont l'argument n'est pas $x \pmod{2\pi}$.)

Exercice 2

(i) Il s'agit d'une transformation de la forme $z \mapsto z' := az + b$, avec $a = 1 + \mathrm{i} \neq 1$: c'est donc une similitude directe.
(ii) Le centre de cette similitude est son unique point fixe :

$$z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{-\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$$

Son rapport est le module de a, soit $|1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$. Son angle est l'argument de a, soit $\arg(1 + \mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
(iii) On calcule :

$$\phi^2(z) = \phi\big(\phi(z)\big) = (1 + \mathrm{i})\big(\phi(z)\big) + 1 = (1 + \mathrm{i})\big((1 + \mathrm{i})z + 1\big) + 1 = 2\mathrm{i}z + (2 + \mathrm{i}).$$

Puisque $2\mathrm{i} \neq 1$, c'est encore une similitude non triviale. Puisque $\phi\big(\phi(z_0)\big) = \phi(z_0) = z_0$, elle a encore pour centre $z_0 = \mathrm{i}$. Son rapport est $|2\mathrm{i}| = 2$ (le carré du rapport précédent) et son angle est $\arg(2\mathrm{i}) = \pi \pmod{2\pi}$ (le double de l'angle précédent).

Exercice 3

(i) L'équation $(a+b\mathrm{i})^2 = -\mathrm{i}$ équivaut au système : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 0, \\ 2ab = -1. \end{cases}$ De plus, les solutions doivent avoir pour norme algébrique la racine carrée de la norme algébrique de $-\mathrm{i}$, c'est-à-dire 1. On a donc $a^2 + b^2 = 1$, ce qui, joint à la première équation, donne $a^2 = b^2 = \dfrac{1}{2}$, donc $a = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $b = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot$ Enfin, l'égalité $2ab = -1$ implique que

a et b sont de signe contraire. On trouve donc les deux racines carrées :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} \text{ et } -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$$

(ii) La mise sous forme canonique de l'équation donne :

$$(z - \mathrm{i})^2 = z^2 - 2\mathrm{i}z - 1 = -\mathrm{i}.$$

On trouve donc les deux solutions :

$$z_1 = \mathrm{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{i} \text{ et } z_2 = \mathrm{i} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{i}.$$

(iii) L'expression $f(z)$ est bien définie lorsque son dénominateur $z - \mathrm{i}$ est non nul, c'est-à-dire lorsque $z \in \mathbf{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$.
L'équation $f(z) = z$ équivaut alors (en chassant les dénominateurs) à $\mathrm{i}z + (1 - \mathrm{i}) = z(z - \mathrm{i})$, autrement dit, à $z^2 - 2\mathrm{i}z + (\mathrm{i} - 1) = 0$. Cette dernière équation a pour solutions les complexes z_1 et z_2, qui sont bien éléments de $\mathbf{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$, donc sont les solutions de l'équation $f(z) = z$.

<u>Exercice 4</u>

(i) La fonction f a pour dérivée la fonction exponentielle, qui est strictement positive sur $\mathbf{R}$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
Puisque $f(0) = e^0 - 1 = 0$, la fonction f est strictement négative sur $]-\infty, 0[$, nulle en 0 et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
La fonction g a pour dérivée la fonction f. Dápres l'étude précédente, la fonction g est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$, elle admet un minimum en 0, et elle est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
Puisque $g(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$, la fonction g est strictement positive sur $]-\infty, 0[$, nulle en 0 et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
La fonction h a pour dérivée la fonction g. Dápres l'étude précédente, la fonction h est donc strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ (car elle est continue) et strictement croissante sur $[0, +\infty[$. Elle est donc strictement croissante sur $\mathbf{R}$.
Puisque $h(0) = e^0 - 1 - 0 = 0$, la fonction h est strictement négative sur $]-\infty, 0[$, nulle en 0 et strictement positive sur $]0, +\infty[$.
(ii) D'après l'étude de la fonction h, on a sur $\mathbf{R}_+$ l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ ,\ e^x - (1 + x + \frac{1}{2}x^2) \geq 0.$$

On en déduit l'inégalité demandée :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+ ,\ e^x \geq 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$