UNIVERSITE PAUL SABATIER Mai 2009

Licence de Mathématiques Fondamentales, L3

Examen d'Équations différentielles et Modélisation

Aucun document n'est admis, durée 3 heures

I (5 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ (par blocs).

1- Calculer explicitement, pour $n \geq 0,\ A^n, B^n$ et C^n. En déduire e^{tA}, e^{tB} et e^{tC}.

2- Considérons quatre fonctions réelles, continues sur $\mathbb{R}_+,\ c_i(t),\ 1 \leq i \leq 4$ et le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} x_1'(t) & = & x_1(t) + x_2(t) + c_1(t) \\ x_2'(t) & = & x_2(t) + c_2(t) \\ x_3'(t) & = & x_4(t) + c_3(t) \\ x_4'(t) & = & x_3(t) + c_4(t). \end{array} \right.$$

Avec (S_0) le système sans second membre associé.

i) Écrire la solution de (S_0) correspondant aux conditions initiales $x_i(0) = v_i$ pour quatre constantes réelles v_i.

ii) Pratiquer la méthode de variation des constantes pour résoudre (S) dans le cas particulier $c_2(t) = e^t,\ c_1(t) = c_4(t) = 0$ et $c_3(t) = 1$.

II (7 points)

1- Considérons le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ suivant :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x'(t) = x^3 \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

i) Déterminer les solutions maximales.

ii) Tracer, dans la même figure, les graphes de plusieurs solutions mettant en lumière leurs domaines.

iii) Notons $\varphi_t(x_0)$ le flot de cette équation autonome, représenter graphiquement son domaine de définition. Vérifier algébriquement le propriété de groupe local.

iv) Calculer la différentielle du flot en un point quelconque (t_0, x_0) de son domaine.

2- On considère maintenant le problème de Cauchy (2)

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = x^3 + t^3 \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

(1) Soit I_0 l' ensemble des points (t, x) de $\mathbb{R}^2$ par lesquels passe une solution $x(t)$ de (2) vérifiant $x'(t) = 0$. Représentez graphiquement I_0. Que peut-on dire, géomètriquement, des courbes solutions au point ou elles rencontrent I_0?

(2) Pour $x_0 > 0$, on considère la solution maximale $(]a, b[, x(t))$ du problème de Cauchy (2). Justifiez son existence.

(3) Montrer que $x(t)$ est strictement croissante sur $[0, b[$.

(4) Montrer que $[0, b[$ est majoré.

(5) Quelle est la limite de $x(t)$ en $+\infty$?

T.S.V.P.

III (3 points + 2 points HB)

Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, lipschitzienne de rapport k en sa deuxième variable, pour $||\cdot||_2$ la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Fixons $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

1- Considérons l'application $T : \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n)$ définie par

$$T(\theta)(t) = \lambda + \int_a^t f(u,\theta(u))\ du.$$

i) Montrer, par récurrence en $p \in \mathbb{N}$, que l'application T composée avec elle même p fois vérifie

$$||[T^p(\varphi) - T^p(\theta)](t)||_2 \leq \frac{k^p(t-a)^p}{p!}||\varphi - \theta||_\infty.$$

(Où $||\gamma||_\infty$ est la norme de la convergence uniforme : $\sup_{a\leq t\leq b}||\gamma(t)||_2$ si $\gamma \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}^n)$).

ii) En déduire que pour p assez grand T^p est contractante, puis que T^p a un unique point fixe. Conclure en démontrant que T a un unique point fixe.

HB 2- On définit une suite de fonctions $y_n : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ en posant $y_0(t) = \lambda$, et

$$y_{n+1}(t) = \lambda + \int_a^t f(u,y_n(u))\ du, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que y_n converge uniformement vers une solution exacte de l'équation $y' = f(t,y)$ telle que $y(a) = \lambda$.

(Vous rédigez en **feuille séparée**, un test sur l'utilisation de logiciel de calcul, sur 5 points).