Equations Différentielles

Exercice 1 On considère l'équation différentielle :

$$x' = tx^2.$$

Pour tout point (t_0, x_0) de $\mathbb{R}^2$ déterminer la solution maximale (I, x) telle que $x(t_0) = x_0$. Représentez graphiquement ces solutions.

Exercice 2 On considère le système linéaire à coefficients réels constants $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$
On va tracer le portrait de phase , c'est à dire l'ensemble des trajectoires :
$T = \{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, en fonction des valeurs propres du sytème.

1. On suppose $b = c = 0$. Résoudre le système et représentez graphiquement T suivant les signes de a et d, et de leur position l'une par rapport à l'autre.
2. Comment traiter le cas général ?

Exercice 3 Pour chacune des équations suivantes où $y = y(x)$ est réelle de variable réelle, décrire les solutions en précisant leur intervalle maximal de définition et dessiner les trajectoires :

$$\text{(i) } y' = e - y \text{ (ii) } y' - y = e^x \text{ (iii) } xy' - 2y = 0.$$

Exercice 4 On considère l'équation $y' = y^2 - x$.

1. Quelles sont les lignes isoclines ? On notera I_0 l'isocline des pentes nulles. Soit P^- l'ensemble des points du plan où la pente des solutions est strictement négative. Décrire P^-. Montrer que si une solution entre dans P^-, alors elle y reste.
2. Etudier et tracer le graphe de la courbe I, des points d'inflexion des solutions. Représenter les régions du plan décrivant la convexité des solutions. On notera I^- la partie de I qui se trouve dans P^- et I^+ celle qui se trouve à l'extérieur de P^-.
3. Soit C une courbe solution passant par un point(x, y) de I^+.
   (a) Montrer qu'en ce point , la pente de I est strictement inférieure à celle de C.
   (b) En déduire que C ne coupe I qu'en ce point , que C ne rencontre pas P^-, et que C n'a qu'un point d'inflexion.
   (c) Montrer que C possède 2 branches infinies à direction asymptotique verticale.
   (d) Soit (x_0, y_0) un point de C. Comparer en ce point, la pente de C et la pente de la solution de $y' = \frac{y^2}{2}$. En déduire que les branches infinies de C ont des asymptotes verticales.
4. Soit D une solution rencontrant I_0.
   (a) Montrer que D possède une asymptote verticale.
   (b) Montrer que D a un point d'inflexion et un seul.

(c) Montrer que D est asymptote à I_0

5. Soit A (resp. B) l'ensemble des points de l'axe Oy par où passe une solution qui rencontre I^+ (resp. I^-).
   (a) Montrer qu'il existe a tel que $A = \{0\}\times]a, +\infty[$.
   (b) Montrer qu'il existe b tel que $B = \{0\}\times] - \infty, b[$.
   (c) Montrer que $a = b$.
   (d) Quelle est l'allure de la solution passant par un point $(0, y)$.

Exercice 5 On considère l'équation
$$x' = 3x^{2/3}$$

1. Soit φ une solution définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$; on pose $\lambda = \inf\{t \leqslant 0; \varphi(t) = 0\} \geqslant -\infty$ et $\mu = \sup\{t \geqslant 0; \varphi(t) = 0\} \leqslant +\infty$. Montrez que φ est identiquement nulle sur (λ, μ).
2. Montrer que φ vaut $(t-\lambda)^3$ si $t \leqslant \lambda$, 0 sur $[\lambda, \mu]$ et $(t-\mu)^3$ si $t \geqslant \mu$; en déduire toutes les solutions maximales de (1) définies sur $\mathbb{R}$ avec $x(0) = 0$.
3. Déterminer toutes les solutions maximales de cette équation.

Exercice 6 On considère l'équation différentielle $x' = |x| + |t|$.

1. Montrez que pour tout réel x_0, il existe une solution maximale (φ, J) telle que $\varphi(0) = x_0$.
2. Déterminer la solution maximale correspondant à $x_0 = 1$, en distinguant les cas $t \geqslant 0$ et $t < 0$, et vérifiez qu'elle est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Combien de fois est-elle dérivable ?