Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques LMF04,
Licence 3$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques Fondamentales **feuille n° 3**

Equations Différentielles

Exercice 1 On considère l' équation différentielle

$$y' = \exp(-xy)$$

.

1. Montrer que tout problème de Cauchy admet une solution maximale sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
   On note (I, ϕ) la solution maximale passant par $(0, 0)$.
2. Montrer que $I = \mathbb{R}$ puis que ϕ est impaire.
3. Déterminer la limite de ϕ quand x tend vers $+\infty$.
4. Tracer l'allure du graphe de ϕ.

Exercice 2 On considère l'équation différentielle suivante :

$$x' - t \sin x = 0 \quad (E)$$

ainsi que le problème de Cauchy associé

$$\begin{cases} (E) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

1. Montrer que le problème de Cauchy a une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0.
2. Démontrer que $I = \mathbb{R}$.
3. (a) Montrer que toute solution maximale est paire.
   (b) Montrer que si (I, x) est une solution maximale, alors la fonction définie par $f(t) = x(t) + 2\pi$ l'est aussi.
   (c) Montrer que si (I, x) est une solution maximale, alors la fonction définie par $f(t) = -x(-t)$ l'est aussi.
   (d) Déduire des questions précédentes des informations sur les graphes des solutions maximales.
4. Résoudre le problème de Cauchy dans les cas suivants :
   -$x_0 = 0$
   -$x_0 = \pi$
   -$t_0 = 0$ et $0 < x_0 < \pi$.

Exercice 3 Soit $A : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application continue. On suppose que A est périodique de période $T > 0$. On considère l' équation différentielle linéaire homogène suivante :

$$x' = A(t)x, \qquad (E)$$

et on note $R(.,.)$ la résolvante associée.

1. Les solutions de (E) sont elles nécessairement périodiques de période T?
2. Montrer que $R(t, t_0) = R(t + T, t_0 + T)$ pour tout t_0 et tout t.
3. On pose $C(t_0) = R(t_0 + T, t_0)$. Montrer que si les solutions de (E) sont toutes de période T alors $C(t_0) = I_n$, pour tout t_0.
4. Vérifier que $C(t_1) = R(t_1, t_0)C(t_0)[R(t_1, t_0)]^{-1}$ pour tout t_0 et tout t_1. En déduire que $C(t)$ est constant lorsque $C(t_0) = I_n$ pour un certain t_0, et qu' alors les solutions sont toutes de périodes T.
5. Soit x une solution non nulle de (E). Montrer que les deux propositions sont équivalentes :

   (a) $x(t + T) = \lambda x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$

   (b) λ est valeur propre de $C(t_0)$ et $x(t_0)$ vecteur propre associé.
   En particulier, pour qu'il existe une solution (non nulle) T-périodique il faut et il suffit que $\lambda = 1$ soit valeur propre de $C(t_0)$ pour un certain t_0.