Université Paul Sabatier 2008-2009

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES - Feuille 2

Licence 3ème Mathématiques Fondamentales

Exercice 1 : On désigne par $x(.)$ une fonction numérique de la variable réelle t, et on considère l'équation différentielle suivante :

$$x' = f(x) \quad (E),$$

où f est définie par

$$f : u \in \mathbb{R} \mapsto f(u) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad u \leq 0, \\ u & \text{si} \quad 0 < u \leq 1, \\ 1 & \text{si} \quad u > 1. \end{cases}$$

1) Justifier que pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution maximale de (E) dont le graphe passe par (t_0, x_0).

2) Une telle solution est-elle définie sur tout $\mathbb{R}$?

3) Pour tout (t_0, x_0), déterminer la solution maximale de (E) dont le graphe passe par (t_0, x_0). (Indication : distinguer les cas $x_0 \leq 0, x_0 \in]0, 1], \quad x_0 \geq 1$.)

Exercice 2 : Soit J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : J \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ une application continue. On se propose de démontrer que toute solution maximale de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est globale si f vérifie l'hypothèse suivante :
(H) Il exite des fonctions $a, b : J \to \mathbb{R}_+$ continues telles que

$$\langle f(t, y), y \rangle \leq a(t)\|y\|^2 + b(t), \quad \forall (t, y) \in J \times \mathbb{R}^m,$$

où $\langle , \rangle$ et $\|\|$ désignent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$.

1) Soit $y : [t_0, t_1[\to \mathbb{R}^m$ une solution maximale à droite passant par un point (t_0, y_0) et soit $r(t) = \|y(t)\|^2$. Montrer que $r'(t) \leq 2a(t)r(t) + 2b(t)$.

En déduire que $\|y(t)\|^2 \leq \rho(t)$ où $\rho : \to \mathbb{R}$ est la solution (toujours globale) de l'équation linéaire $\rho' = 2a(t)\rho + 2b(t)$, telle que $\rho(t_0) = \|y_0\|^2$.

Ind : Soit $A(t)$ une primitive de $a(t)$; étudier le signe de la dérivée de $(r(t) - \rho(t)) \exp^{-2A(t)}$.

2) Déterminer un majorant explicite de $\|y(t)\|$ lorsque a et b sont des constantes.
3) On suppose que $t_1 < \sup J$. Montrer que $y(t)$ et $y'(t)$ sont bornées sur $[t_0, t_1[$ et que ces fonctions se prolongent par continuité en t_1.

4) Montrer que ceci conduit à une contradiction. Conclure.

Exercice 3 : Equation différentielle avec une matrice préservant une droite.
Soit $A(t)$ une matrice réelle carrée de taille n dépendant continûment du paramètre $t \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$X'(t) = A(t)X(t) \quad (E),$$

où $X(t)$ représente un vecteur colonne à n composantes dépendant de façon C^1 du temps t.
1) Dans cette question on suppose que V est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ tel qu'il existe une fonction continue $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $A(t)V = \lambda(t)V$.

Montrer que pour toute fonction $t \mapsto x(t)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, le vecteur colonne $X(t) = x(t)V$ est solution de $X' = AX$ ssi x est solution d'une équation différentielle du premier ordre qu'on précisera. En déduire pour tout vecteur V_0 de la droite vectorielle engendrée par V l'unique solution $X(t)$ de (E) (sur $\mathbb{R}$) telle que $X(0) = V_0$ (Exprimer X en fonction de V_0 et λ).

2) Application : donner une droite de solutions de $x' = x + (2t-1)y, \quad y' = 2ty.$

On pose

$$W = \det \begin{pmatrix} x & y \\ x' & y' \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'équation vérifiée par W. Calculer W, puis en déduire une base de solutions du système.

3) Supposons qu'il existe une base $(V_1, \cdots, V_n)$ (indépendante de t !) telle que $A(t)$ est diagonalisable dans $\mathcal{B}$ pour tout $t \in R$. Donner une base de solutions de (E).

Exercice 4 : Wronskien.
Soit $(E) : x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ une équation différentielle linéaire scalaire homogène du second ordre sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ (avec a, b continues sur I). Soit ϕ_1, ϕ_2 deux solutions de (E). On pose

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{pmatrix}.$$

1) Soit $t, t_0 \in I$. Calculer $W'(t)$. Montrer que

$$W(t) = W(t_0) \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} a(s)ds\Big).$$

Montrer que (ϕ_1, ϕ_2) est une base de solutions de (E) ssi il existe $t_0 \in I$ tel que $W(t_0) \neq 0$.

Application : on étudie l'équation $(E) : 2t^2x'' + 3tx' - x = 0$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\phi_1(t) = \sqrt(t)$ et $\phi_2(t) = \frac{1}{t}$ sont solutions. Calculer $W(t)$. Quelle est la limite de W en 0 ? Déterminer la solution x telle que $x(1) = 2, x'(1) = 1$.

2) On suppose dans cette question que ϕ_1 ne s'annule pas sur I. Pour ϕ_2 une autre solution, exprimer $\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)'(t)$ en fonction de $W(t)$ et ϕ_1.

Application : on étudie l'équation $(E) : t^2x'' - (t^2+3t)x' + (t+3)x = 0$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$. montrer que $\phi_1(t) = t$ est solution. Soit ϕ_2 une autre solution. Etablir que

$$W(t) = W(1)\exp\Big(\int_1^t \frac{s+1}{s}ds\Big).$$

Calculer explicitement $W(t)$. En déduire une solution ϕ_2 indépendante de ϕ_1.
Déterminer l'unique solution x telle que $x(1) = 1, \quad x'(1) = 0$

Exercice 5 : Résolution d'équations avec second membre.
Intégrer les systèmee différentiels suivants. On demande les solutions à valeurs réelles. On commencera par donner une base de solutions du système linéaire.

$$\begin{cases} x' = 4x + 2y + e^t \\ y' = -x + y + t. \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x' = 2x + y - z + 1 \\ y' = y + z + t. \\ z' = x + z + t^2 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 3z + t \\ y' = x + 4y + 3z + \cos t. \\ z' = -x - 2y - z \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 2z - \cosh t \\ y' = x + 2y + \sinh t. \\ z' = -x + y - z + \cosh t \end{cases} \tag{4}$$

Exercice **6.** On considère l'équation différentielle :

$$y' = y^2 - x. \qquad (E_5)$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on désigne par (I_a, ϕ_a) la solution maximale de (E_5) vérifiant $\phi_a(0) = a$.
(1). Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'intervalle I_a est minoré. Quel est le comportement de ϕ_a en sa borne inférieure ?
(2). Quel est l'ensemble Γ_0 des points (u, v) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels il existe une solution maximale (I, ϕ) telle que

$$u \in I, \quad \phi(u) = v, \quad \phi''(u) = 0.$$

Géométriquement, que peut-on dire des courbes intégrales aux points où elles rencontrent Γ_0 ? Quelles sont les positions de ces courbes par rapport à Γ_0 au voisinage de ces points ?
(3). Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0^2 - x_0 \leq 0$. Montrer que la solution maximale (I, ϕ) passant (x_0, y_0) satisfait les propriétés suivantes :

- $[x_0, +\infty[\subset I$,
- $\phi : [x_0, \infty[\to \mathbb{R}$ est décroissante, et $\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = -\infty$.

(4). Quel est le comportement de ϕ_a sur $I_a \cap \mathbb{R}_+$ pour $a \leq 0$?
(5). On note Γ_1 la partie de la parabole d'équation $y^2 - x = 1$ contenue dans le quart de plan $\mathbb{R}_+^2$. Étudier les positions relatives de Γ_1 et d'une courbe intégrale au voisinage d'un point d'intersection. En déduire qu'une solution maximale (I, ϕ) passant par un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ et tel que $y_0^2 - x_0 \geq 1$ vérifie :

$$\forall x \in I \cap [x_0, +\infty[, \quad \phi'(x) \geq 1$$

et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I \cap [x_0, +\infty[, \quad x \leq \phi(x) + \alpha.$$

En déduire que I est majoré et que ϕ tend vers $+\infty$ en borne supérieure de I.
(6). Montrer qu'il y a trois possibilités pour (I_a, ϕ_a) :

- $I_a \supset \mathbb{R}_+$ et $\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = -\infty$,
- $I_a \supset \mathbb{R}_+$ et $\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = +\infty$ avec $\phi_a(x) \sim \sqrt{x}$,
- I_a est majoré et $\lim_{x \to \sup I_a} \phi(x) = +\infty$.

On note A_1, A_2 et A_3 les ensembes des valeurs de $a \in \mathbb{R}_+$ se trouvant, dans cet ordre, dans chacune des trois situations précédentes. Montrer que $\forall a_1 \in A_1$, $\forall a_2 \in A_2$ et $\forall a_3 \in A_3$, on a

$$a_1 < a_2 < a_3.$$

(7). Montrer que A_1, A_2 et A_3 sont de la forme :

$$A_1 = [0, \alpha[, \quad A_2 = [\alpha, \beta], \quad A_3 =]\beta, +\infty[\quad \text{avec } \ 0 < \alpha \leq \beta < 1.$$

(8). On suppose que $\alpha < \beta$. Soient $y_1 = \phi_\alpha$ et $y_2 = \phi_\beta$. Montrer que $z = y_2 - y_1$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et en déduire une contradiction.
(9). Résumer le comportement de ϕ_a suivant les valeurs de $a \in \mathbb{R}$.