Equations Différentielles

Exercice 1 On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices à coefficients complexes.

1. Montrer qu' on peut munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme $\|.\|$ vérifiant $\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|$.
2. Montrer que la série de terme général $\frac{A^n}{n!}$ est normalement convergente, puis convergente dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note sa somme e^A ou $\exp A$, c'est l'exponentielle de la matrice A.
3. Vérifier les propriétés suivantes de l'exponentielle de matrice :
   (a) Si P est inversible et $B = P^{-1}AP$, alors $e^B = P^{-1}e^A P$.
   (b) Si A et B commutent, et si $t \in \mathbb{C}$, alors $e^{tA}e^{tB} = e^{t(A+B)}$.
   (c) e^A est inversible et $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
4. Montrer que l'application $\Theta : K \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\Theta(t) = e^{tA}$ est dérivable sur $K = \mathbb{R}$ et holomorphe sur $K = \mathbb{C}$ et calculer $\Theta'(t)$.
5. Quelle équation différentielle linéaire est vérifiée par la fonction θ?
6. Montrer que les solutions de l'équation $X'(t) = AX(t)$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont toutes de la forme $X(t) = e^{tA}v$ avec $v \in \mathbb{R}^n$. Exprimer , à l'aide de l'exponentielle, la solution qui vérifie la condition initiale $X(t_0) = v_0$.
7. Une matrice A se décompose de manière unique sous la forme $A = D + N$ avec D diagonale, N nilpotente et $DN = ND$. Expliquer comment calculer e^A à l'aide de cette décomposition.

Exercice 2 Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calculer e^tA et en déduire l 'ensemble des solutions du système differentiel

$$\begin{cases} x' = 3x + 2y - 2z \\ y' = -x + z \\ z' = x + y \end{cases}$$

Exercice 3 Résoudre l'équation différentielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 On considère l'équation différentielle (E) :

$$\begin{cases} x' = 3x + z + \sin t \\ y' = 2x + y \\ z' = -x + y + z \end{cases}$$

1. Calculer e^{tA} pour $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $X(t) = e^{tA}v(t)$ avec $v(t) \in \mathbb{R}^3$.
3. Donner toutes les solutions du système différentiel (E).

Exercice 5 On considère l'équation différentielle :

$$x' = tx^2.$$

Pour tout point (t_0, x_0) de $\mathbb{R}^2$ déterminer la solution maximale (I, x) telle que $x(t_0) = x_0$. Représentez graphiquement ces solutions.

Exercice 6 On considère le système linéaire à coefficients réels constants $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$
On va tracer le portrait de phase , c'est à dire l'ensemble des trajectoires :
$T = \{(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, en fonction des valeurs propres du sytème.

1. On suppose $b = c = 0$. Résoudre le système et représentez graphiquement T suivant les signes de a et d, et de leur position l'une par rapport à l'autre.
2. Comment traiter le cas général ?