Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques LMF04, Licence 3$^{\text{ème}}$ année, Mathématiques Fondamentales

Calcul Différentiel - Examen partiel du 30 mars 2007
Durée : 3 heures
Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

Question de cours. Énoncer le théorème d'inversion locale.

Exercice 1 Soit E l'espace vectoriel $C^0([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$. On munit E de la norme $\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. *Le but de l'exercice est de montrer que les applications*

$$\begin{array}{rcl} F : E & \to & E \\ f & \mapsto & F(f) = \sin \circ f \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} G : E & \to & E \\ f & \mapsto & G(f) = \cos \circ f \end{array}$$

sont de classe C^∞.

(a) Montrer que pour tout $\varepsilon, a \in \mathbb{R}$

$$|\cos(a+\varepsilon) - \cos(a) + \varepsilon \sin(a)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2, \quad |\sin(a+\varepsilon) - \sin(a) - \varepsilon\cos(a)| \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

(b) Montrer que F, G sont différentiables et calculer leurs différentielles.

(c) Soit Φ l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} \Phi : E & \to & \mathcal{L}(E,E) \\ f & \mapsto & \Phi(f) \end{array}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \Phi(f) : E & \to & E \\ h & \mapsto & \Phi(f)(h) = f \cdot h \end{array}$$

$((f.h)(x) = f(x)g(x)$ est le produit de $f(x)$ et $g(x)$.) Montrer que Φ est de classe C^∞. Calculer $\|D\Phi(f)\|$.

(d) Exprimer les différentielles $DF : E \to \mathcal{L}(E,E)$ et $DG : E \to \mathcal{L}(E,E)$ de F et G en fonction de Φ, F, G. En déduire que F et G sont de classe C^∞.

Exercice 2 On note $\mathcal{M}_n$ l'espace des matrice réelles $n \times n$ et $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{M}_n$ le sous-espace vectoriel des matrice *symétriques*, $\mathcal{S}_n = \{M \in \mathcal{M}_n : {}^tM = M\}$. On fixe $S_0 \in \mathcal{S}_n$ et *inversible.* Soit $\varphi : \mathcal{M}_n \to \mathcal{S}_n$ l'application définie par

$$\varphi(M) = {}^tMS_0M$$

(a) Montrer que φ est C^∞ et déterminer sa différentielle.

(b) Montrer que $D\varphi(I_n)$ est surjective et préciser son noyau.

(c) Soit $\tilde{\mathcal{S}_n} = \{M \in \mathcal{M}_n : S_0M \in \mathcal{S}_n\}$. On note $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\tilde{\mathcal{S}_n}} : \tilde{\mathcal{S}_n} \to \mathcal{S}_n$ la restriction de φ au sous-espace vectoriel $\tilde{\mathcal{S}_n} \subset \mathcal{M}_n$. Calculer $D\tilde{\varphi}(I_n)$ et montrer qu'elle est un isomorphisme.

(d) En déduire qu'il existe un voisinage U_0 de S_0 dans $\mathcal{S}_n$ et une application de classe C^1 $\psi : U_0 \to \mathcal{M}_n$ telle que

$$S = \varphi(\psi(S)), \forall S \in U_0.$$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 au voisinage $U_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < \varepsilon\}$ de l'origine 0. On suppose que $f(0) = 0$ et que $0 \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f (i.e. $Df(0) = 0$). On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral :

$$f(x) = f(0) + Df(0)x + \int_0^1 (1-t)D^2f(tx)(x,x)dt, x \in U_\varepsilon.$$

(a) Expliciter $D^2f(a)(h,k)$. En déduire l'existence de fonctions $\alpha, \beta, \gamma : U_\varepsilon \to \mathbb{R}$ de classe C^1, telles que

$$f(x_1,x_2) = \alpha(x_1,x_2)x_1^2 + 2\beta(x_1,x_2)x_1x_2 + \gamma(x_1,x_2)x_2^2.$$

Vérifier que

$$\alpha(0)x_1^2 + 2\beta(0)x_1x_2 + \gamma(0)x_2^2 = \frac{1}{2}D^2f(0)(x,x).$$

Question hors barème.

(b) On suppose que le point critique 0 est non-dégénéré, c'est à dire $\beta(0)^2 - \alpha(0)\gamma(0) \neq 0$. On écrit f sous la forme

$$f(x_1,x_2) = (x_1,x_2)S(x)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ où } S(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ \beta(x) & \gamma(x) \end{pmatrix}.$$

Montrer, en utilisant exercice 2(d), que l'application

$$\phi : x \mapsto \psi(S(x))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

est un difféomorphisme local près de l'origine de $\mathbb{R}^2$, tel que

$$f \circ \phi^{-1}(x) = \alpha(0)x_1^2 + 2\beta(0)x_1x_2 + \gamma(0)x_2^2.$$

Nous avons ainsi démontré le Lemme de Morse suivant : *Au voisinage du point critique non-dégénéré 0 la fonction f est équivalente à sa partie quadratique $\frac{1}{2}D^2f(0)(x,x)$.*