Calcul Différentiel

Exercice 1 Pour chacune des fonctions f suivantes, rechercher les extremums sur $\mathbb{R}^2$ et esquisser les courbes de niveau de la surface d'équation $z = f(x, y)$:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y) = x^2 - y^2$
2. $f(x, y) = x^2 + y^4$
3. $f(x, y) = x^2 + y^3$
4. $f(x, y) = x^2 - y^2 + y^4/4$.

Exercice 2 (fonctions convexes) Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur U, si pour tout $x, y \in U$ et tout $t \in [0, 1]$,

$$f((1-t)x + ty) \leqslant (1-t)f(x) + tf(y).$$

On suppose f différentiable sur U.

1. Montrer qu'elle est convexe sur U si et seulement si
$$f(y) - f(x) \geqslant Df(x)(y - x) \text{ pour tous } x, y \in U.$$
2. Montrer que si $a \in U$ et $Df(a) = 0$, alors f admet en a un minimum global sur U.
3. Étudier la convexité des fonctions de l'exercice précédent.

Exercice 3 (examen 2007)

(a) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dire si l'application
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \end{array}$$
est une submersion en (x_0, y_0). Justifier la réponse.

(b) Montrer que l'ensemble $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x = 0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension un (une courbe). Dessiner S^1.

(c) Montrer que l'ensemble $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux (une surface). Dessiner S^2.

(d) Calculer les espaces tangents $T_{(0,0)}S^1$, $T_{(0,0,1)}S^2$.

(e) Montrer que l'ensemble
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2x = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension un (une courbe).

(f) Déterminer les points de la courbe C vérifiant la condition d'extrémalité de Lagrange pour la fonction $h(x, y, z) = x$.

(g) En déduire la valeur minimale et maximale de la restriction de $h(x, y, z) = x$ à C.

Exercice 4 Comment obtenir un parallélépipède rectangle d'aire minimum et de volume donné (emballage le plus économique) ?
Indication : Si x, y, z sont les trois côtés de la boite, son volume est $V = xyz$ et sa surface est $S = 2(xy + yz + zx)$. On pourrait rechercher le minimum de S lié par la valeur donnée de V.

Exercice 5 Établir les inégalités

$$\sqrt[2]{x_1 x_2} \leqslant \frac{x_1 + x_2}{2}, \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

pour tout $x_i \geqslant 0$. Quand a-t-on égalité ?

Exercice 6 Montrer que

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 x_1 + \dots \alpha_n x_n$$

pour tout $x_i \geqslant 0$, et tous $\alpha_i > 0$ de somme 1. Quand a-t-on égalité ?
Indication : On pourra rechercher le maximum du premier membre, fonction des x_i, sur l'ensemble défini par $\sum \alpha_i x_i = 1$.