Calcul Différentiel

Exercice 1 Soit H un espace de Hilbert et $a \in H$. On a déjà vu (feuille 2) que l'application f définie par : $x \in H \longmapsto f(x) = \langle a, x \rangle e^{-||x||^2}$ est différentiable. On a calculé ses points critiques. Montrer que f est deux fois différentielle, calculer sa différentielle seconde. Ses points critiques sont-ils des extrémums locaux ? de quelle nature ?

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, une application convexe et différentiable. Soient $h_1, \cdots, h_m$ des fonctions affines et $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) = \cdots = h_m(x) = 0\}$. On suppose qu' en un point c de S il existe des réels $\lambda_1 \cdots \lambda_m$ tels que

$$\nabla f(c) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(c) = 0.$$

Montrer que c est un minimum global de f sur la sous-variété S.

Exercice 3 Soient $A \in \mathcal{M}_\backslash(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, f une application définie sur $\mathbb{R}^n$ par $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ et $S = \{x \in \mathbb{R}^n, ||x|| = 1\}$.

1. Montrer que f est bornée sur S et que ses bornes sont atteintes.
2. Montrer que S est une sous-variété.
3. On note S_1 (resp. S_2) l'ensemble des points réalisant le minimum (resp. le maximum) de f sur S. Ecrire les conditions de Lagrange vérifiées par les points de $S_1 \cup S_2$.
4. Déterminer la valeur maximale et minimale de f sur S en fonction des valeurs propres de A et en déduire $f(S)$.

Exercice 4 Soient $q \geqslant p > 1$, $f : x = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n \longmapsto f(x) = \sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^p$ et $S = \{x = (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^q = 1\}$.

1. Vérifier que S est une sous-variété de classe C^1 et de dimension $n-1$.
2. Déterminer les points de S vérifiant la condition d'extrémalité de Lagrange pour f.
3. En déduire la valeur maximale de$\sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^p$ parmi les réels $x_1, \cdots, x_n$ vérifiant la contrainte $\sum_{i=1}^n \mid x_i \mid^q = 1$.
4. Que peut-on dire de la valeur minimale ?

Exercice 5 On considère l'équation différentielle (E) :

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = t^2 - x \end{cases}$$

et le problème de Cauchy associé

$$\begin{cases} (E) \\ x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que le problème de Cauchy admet une unique solution $z = (x, y)$ au voisinage de $(0, 0)$.
2. En remplaçant le problème de Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = f(t, z) \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

par l'équation intégrale

$$z(t) = z(0) + \int_0^t f(s, z(s))ds,$$

expliciter la construction d'une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant uniformément vers la solution z obtenue ci-dessus.
3. En déduire le développement de Taylor à l'ordre 5 de z.

Exercice 6 On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} z' = (2\sqrt{x} + z)^2 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que ce problème admet une solution unique au voisinage de 0.
2. En déduire qu'il en est de même pour

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

3. Montrer l'existence d'une suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'approximations successives de la solution y (comme dans l'exercice précédent).
4. Calculer explicitement les 3 premiers termes de cette suite.

Exercice 7 On considère l'équation différentielle (E) suivante

$$\begin{cases} x' = \frac{tx+y}{1+t^2} \\ y' = \frac{-x+ty}{1+t^2} \end{cases}$$

1. Montrer qu'une solution de (E) est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la dérivée seconde. En déduire l'ensemble des solutions de (E).
2. Résoudre un problème de Cauchy et donner la résolvante associée à cette équation.

Exercice 8 On considère l'équation différentielle (E) suivante

$$\begin{cases} x' = 3x + z + sint \\ y' = 2x + y + (1 - a^2)z \\ z' = -x + y + z \end{cases}$$

1. Résoudre le système homogène associé.
2. Déterminer l'ensemble des solutions lorque $a = 1$ à l'aide de la résolvante.