SOUS-VARIÉTÉS DE $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. *Soit* $\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy = 0\}$ *et* $\Gamma^* := \Gamma \setminus \{(0,0)\}$.

1) Montrer que Γ^* *est une sous-variété de* $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que Γ *n'est pas une sous-variété de* $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2. *Les ensembles ci-dessous sont-ils des variétés ?*

1) $\Gamma_1 := \{(t,t^2) \in \mathbb{R}^2 \,/\, t \in \mathbb{R}\}$;

2) $\Gamma_2 := \{(t^2,t^3) \in \mathbb{R}^2 \,/\, t \in \mathbb{R}\}$;

3) $\Gamma_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x > 0, y \geq 0\}$;

4) $\Gamma_4 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2 + y^2 = z^m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. *Soit* $X \subset \mathbb{R}^n$ *et* $Y \subset \mathbb{R}^m$ *deux sous-variétés. Montrer que*

$$X \times Y := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \,/\, x \in X, y \in Y\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n+m}$. *Quelle est sa dimension ?*

Exercice 4. *On considère l'ensemble*

$$\mathcal{O}(n,\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \,/\, M \cdot {}^t M = Id\}$$

et on note $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ *l'ensemble des matrices symétriques.*

1) Montrer que $\mathcal{S}(n,\mathbb{R})$ *est une sous-variété de* $\mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$. *Quelle est sa dimension ?*

2) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} g : \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}(n,\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M \cdot {}^t M - Id \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$. *Calculer sa différentielle.*

3) Montrer que g *est une submersion. En déduire que* $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ *est une sous-variété de* $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$. *Quelle est sa dimension ?*

Exercice 5. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$.

1) Montrer que l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto rang D_x f \in \mathbb{R}$ *est semi-continue inférieurement.*

2) Donner un exemple surlequel $rang D_a f < rang D_x f$ *pour tout* $x \neq a$ *dans un voisinage de* a.

Exercice 6. *Montrer que l'ensemble*

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, xy + xz + 2x + 2y - z = 0\}$$

est une surface de $\mathbb{R}^3$ *au voisinage de* 0.

Donner l'équation du plan tangent à cette surface.

Exercice 7. *Montrer que l'ensemble*

$$\mathcal{C} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 4xy + 2xz + 4y - z = xy + xz + 2x + 2y - z = 0\}$$

est une courbe au voisinage de l'origine.

Déterminer l'espace tangent à cette courbe à l'origine.

Exercice 8. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$, S une partie non vide de E et $a \in E$. On appelle vecteur tangent en S au point a un élément $v \in E$ tel qu'il existe une suite (x_n) déléments de S et une suite (t_n) de réels strictement positifs, avec*

$$x_n \to a, \; t_n \to 0, \quad et \quad \frac{x_n - a}{t_n} \to v.$$

On note T_aS l'ensemble de ces vecteurs.

1) Montrer que l'on retrouve la notion d'espace tangent, lorsque S est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2) Calculer T_0S lorsque $S = \Gamma$ (Exercice 1), puis $S = \Gamma_2$ (Exercice 2).

3) Montrer que si S est convexe, alors $x - a \in T_aS$, pour tout $(x,a) \in S^2$.

4) Calculer T_aS lorsque S est l'un des deux ensembles

$$S_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\}, \; S_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

Comparer T_aS_1 et T_aS_2 lorsque $a \in S_2$.

Exercice 9. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un polynôme homogène de degré $\alpha > 0$.*

1) En dérivant $f(\lambda x)$, montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \alpha f(x), \; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2) Montrer que si $t \in \mathbb{R}^*$, alors $H_t := f^{-1}(t)$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$.

3) Que se passe-t'il pour $t = 0$?

Exercice 10. *Soit $f : A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \mapsto \det A \in \mathbb{R}$.*

1) Montrer que

$$\lim_{t \to 0} \frac{\det(Id + tA) - 1}{t} = tr(A), \; \forall A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}).$$

2) En déduire l'expression de $D_{Id}f$, puis celle de D_Af, $\forall A \in GL(n,\mathbb{R})$.

3) Montrer que $SL(n,\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \,/\, \det A = 1\}$ est une hypersurface de $\mathcal{M}(n,\mathbb{R})$. Montrer que son espace tangent en Id est

$$T_{Id}SL(n,\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \,/\, tr(M) = 0\}.$$