Université Paul Sabatier **Année 2006-2007**

LICENCE DE MATHEMATIQUES : CALCUL DIFFERENTIEL

Feuille n° 4

1 - Soient Ω un ouvert non vide de E, evn réel, $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On définit :
$g : x \in \Omega \to (f^+(x))^2$ où $f^+(x) = \max(f(x), 0)$. On suppose :
a) f différentiable sur Ω. Montrer que g est différentiable sur Ω
a) f 2-fois différentiable sur Ω. Est-ce que g est 2-fois différentiable sur Ω ?

2 - Soient E, F evn, Ω un ouvert non vide de E, $f : \Omega \to F$, (k +1) fois différentiable sur Ω, $k \geq 1$, $(h_1, h_2, ...,h_{k+1}) \in E^{k+1}$ et $u : x \in \Omega \to D^kf(x)(h_1, h_2, ...,h_k)$, montrer que :

$$D^{k+1}f(x)(h_1, h_2, ...,h_{k+1}) = Du(x)(h_{k+1})$$

Soit $g : \Omega' \to G$ (evn) tel que $f(\Omega) \subset \Omega'$ ouvert de F.On suppose f et g m-fois différentiables sur leurs domaines respectifs de définition. Déterminer D^m (gof) dans les cas m =1, 2, 3.

3 - Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 3-fois différentiable en $a \in \Omega$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$, développer $D^3f(a)(h,h,h)$ à l' aide des dérivées partielles de f en a.

4 - Soient E et F 2 espaces vectoriels réels normés. On considère :
$b : E \times E \to F$ bilinéaire et continue, $u : E \to F$ linéaire et continue, $c \in F$

Soit $f : x \in E \to b(x,x) + u(x) + c \in F$.

Montrer que $f \in C^\infty(E,F)$ et déterminer pour tout x de E : $Df(x)$ et $D^2f(x)$.
Que vaut $D^2f(x)$ si b est symétrique ?
Application : $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$, $B \in M_n(\mathbb{R})$, $< , >$ produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

$$f : x \in \mathbb{R}^n \to < Bx , x > + < \theta , x > + c \in \mathbb{R}$$

Déterminer pour tout x de E : $\nabla f(x)$ et $\nabla^2 f(x)$. Que vaut $\nabla^2 f(x)$ si B est symétrique ?

5 - Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ Montrer que les applications suivantes sont C^∞ sur leur domaine de définition et déterminer leurs différentielle première et seconde.
a) $g : A \to A^TA$ b) $i : A \to A^{-1}$ c) $p \in \mathbb{N}^*$ $i_p : A \to A^{-p}$

6 - Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(A, B) \in E \to \mathrm{tr}(A^TB)$.
On considère l'application : $f : A \in E \to ||A^TA - I_n||^2$. Montrer que :
a) f différentiable sur E et , pour tout A de E, déterminer Df(A).
(Pour $A \in O_n(\mathbb{R})$, on vérifie que Df(A) = 0. Pouvait-on prévoir ce résultat ?)
a) f 2-fois différentiable sur E et déterminer, pour tout A, H, K de E, $D^2f(A)(H, K)$
En déduire la valeur de $D^2f(I_n)(H, H)$

7 - Soient Ω un ouvert convexe non vide de E, evn réel, $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

a) On suppose que f est différentiable sur Ω. Montrer que :

(f est convexe sur Ω) $\Leftrightarrow$ $(\forall x, y \in \Omega, f(y) - f(x) \geq Df(x)(y-x))$

(f est convexe sur Ω) $\Leftrightarrow$ $(\forall x, y \in \Omega, (Df(y) - Df(x))(y-x) \geq 0)$

Si $a \in \Omega$, f convexe sur Ω, montrer que : $(Df(a) = 0) \Leftrightarrow (f(x) \geq f(a)\ \forall x \in \Omega)$

b) On suppose que f est 2-fois différentiable sur Ω. Montrer que :

(f est convexe sur Ω) $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in \Omega, \forall h \in E : D^2f(x)(h,h) \geq 0)$

8 - Soient E, F 2 evn réels et $f : E \to F$ différentiable et homogène de degré n ($\in \mathbb{N}^*$)

a) Montrer que Df est homogène de degré (n - 1). En déduire que, pour $1 \leq k \leq n$, si f est k-fois différentiable, $D^k f$ est homogène de degré (n - k) et $\forall x \in E, \forall m : 1 \leq k \leq m$

$$D^m f(x)(x, ...,x) = f(x)\, n! / (n - m)!$$

b) En déduire que si f est n-fois différentiable, alors $f \in C^\infty(E,F)$ et $D^k f = 0$, si $k \geq n + 1$

9 - Soit $(E, \|\,.\,\|)$ un espace vectoriel normé réel et soit $f \in C^2(E,]0, +\infty[)$

On suppose que : $\exists M \in]0, +\infty[$ tq : $\forall x \in E\ \|D^2 f(x)\| \leq M$

Montrer que : $\forall x \in E\ \ \|Df(x)\|^2 \leq 2 M f(x)$

Montrer que l'inégalité est stricte si E est de dimension finie.

10 - Soit f, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui à (x,y) associe : $(x^3 + y^3 + xy, x^2 + y^2 + xy)$

En utilisant une formule de Taylor, exprimer exactement f en puissances de (x - 1) et (y - 2)

11 - Soient E un Banach, $F = £(E)$ et $\Omega = Isom(E)$

a) Montrer que si $u \in \Omega$, $h \in F$ tel que $\|h\| < 1/\|u^{-1}\|$, alors $u + h \in \Omega$ et :

$$(u + h)^{-1} = \Sigma_{n\geq 0} (-1)^n (u^{-1} h)^n u^{-1}$$

En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N}^*\ \ (u + h)^{-1} = \Sigma_{0\leq n\leq p} (-1)^n (u^{-1} h)^n u^{-1} + o(\|h\|^p)$

b) Soit $i : u \in \Omega \to u^{-1} \in \Omega$. Sachant que $i \in C^\infty(\Omega)$, déterminer $D^n i(u)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

12 - Soient I un intervalle non vide de R, E un espace de Banach et $\varphi \in C^2(I,\mathbb{R})$ telle que :

$\exists A, B > 0$ avec : $\forall x \in I\ \ \|\varphi(x)\| \leq A\ \ \ \|D^2\varphi(x)\| \leq B$

a) Soit $a \in I$, $h > 0$ tel que $[a - h, a + h] \subset I$, montrer que : $\forall x \in I$:

$$\|D\varphi(x)\| \leq A/h + B[(a - x)^2 + h^2]/(2h)$$

b) En déduire que si $[a - (A/B)^{1/2}, a + (A/B)^{1/2}] \subset I$ et si $|x - a| \leq (A/B)^{1/2}$ alors :

$$\|D\varphi(x)\| \leq 2 (AB)^{1/2}$$

c) Si $I = \mathbb{R}$, montrer que : $\forall x \in I : \|D\varphi(x)\| \leq (2AB)^{1/2}$

d) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},E)$, on suppose $\exists M, k > 0$ tq $\forall n \in \mathbb{N} : \|D^{2n}\varphi(x)\| \leq M k^{2n} (2n)!$

Montrer que f est analytique sur R.