DIFFÉRENTIABILITÉ ET ACCROISSEMENTS FINIS

Exercice 1. *On considère pour* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, les normes*

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \;\; N_2(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \;\; \text{et } N_\infty(x) = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

Déterminer l'ensemble des points où $N_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est différentiable.*

Exercice 2. *Soit* $a, b \in \mathbb{N}^*$*. On considère* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \frac{x^a y^b}{x^2 - xy + y^2} \;\; \text{si } (x,y) \neq (0,0), \;\; \text{et } f(0,0) = 0.$$

Déterminer les valeurs de a, b *pour lesquelles* f *est continue (resp.* $\mathcal{C}^1$*).*

Exercice 3. *Soit* E, F *deux espaces de Banach sur* $\mathbb{C}$*. Ce sont également des espaces vectoriels sur* $\mathbb{R}$*. On note* $\mathcal{L}_K(E,F)$ *l'espace vectoriel sur* K *des applications* K*-linéaires continues de* E *dans* F *(*$K = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*

1) Vérifier que $\mathcal{L}_\mathbb{C}(E,F)$ *est un sous-espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$ *de* $\mathcal{L}_\mathbb{R}(E,F)$*.*

2) Montrer que si f *est* $\mathbb{R}$*-différentiable au point* $a \in E$*, alors elle est* $\mathbb{C}$*-différentiable ssi sa dérivée* Df_a *appartient à* $\mathcal{L}_\mathbb{C}(E,F)$*.*

3) On suppose ici que $E = F = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ *et on considère*

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) \in \mathbb{R}^2.$$

Justifier que f *est* $\mathbb{R}$*-différentiable. Quelle est sa différentielle ? Montrer que* f *est* $\mathbb{C}$*-différentiable ssi* $\beta = -\gamma$ *et* $\delta = \alpha$*, et vérifier que* f *s'écrit alors* $f(z) = \lambda z$*, où* $z = x + iy = (x,y)$ *et* $\lambda = \alpha + i\gamma = (\alpha, \gamma)$*.*

Exercice 4. *On considère ici l'espace de Banach* (E, N) *où* $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ *et* $N(f) = \sup_{[0,1]} |f|$*. Soit* $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *et*

$$\Phi : f \in E \mapsto \int_0^1 (\varphi \circ f)(t)\, dt \in \mathbb{R}.$$

Montrer que Φ *est partout différentiable et déterminer sa différentielle.*

Exercice 5. *Soit* E_1, E_2, F *des espaces de Banach et* $f : E_1 \times E_2 \to F$ *une application bilinéaire. On munit* $E_1 \times E_2$ *de sa structure Banach produit.*

1) Montrer que f *est continue en tout point ssi elle est bornée sur le produit des boules unités* $\{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \,/\, ||x_1|| \le 1 \text{ et } ||x_2|| \le 1\}$*.*

2) On suppose f *continue et on fixe* $a = (a_1, a_2) \in E_1 \times E_2$*. Montrer que* f *est différentiable au point* a *avec, pour tout* $(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$*,*

$$Df_{(a_1,a_2)}(h_1, h_2) = f(h_1, a_2) + f(a_1, h_2).$$

Exercice 6. *Soit $\alpha : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable sur un ouvert U d'un espace de Hilbert H. Soit*

$$\varphi : x \in U \mapsto \varphi(x) = \alpha(x)x \in H.$$

1) Montrer que φ est différentiable sur U et calculer sa différentielle (on pourra utiliser l'exercice précédent en observant que $\varphi = \Phi(\alpha, Id_H)$, où Φ est une application bilinéaire).

2) Montrer que

$$f : x \in E \setminus \{0\} \mapsto f(x) = \frac{x}{||x||^2} \in E$$

est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 7. *Soit H un espace de Hilbert et $a \in H$ On considère*

$$f : x \in H \mapsto f(x) = \langle a, x\rangle e^{-||x||^2} \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que f est différentiable sur H et calculer son gradient.

2) Calculer les points critiques de f.

Exercice 8. *Soit $f : \theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$.*

1) Montrer que f est différentiable en tout point et calculer sa différentielle.

2) Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, il n'existe aucun $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(b) - f(a) = i(b-a)e^{ic}.$$

Qu'en déduisez vous ?

Exercice 9. *Soit E, F deux espaces de Banach et $f : U \to F$ une application différentiable sur un ouvert $U \subset E$. On fixe $\lambda > 0$.*

1) Montrer que $\sup_{x\in U} ||D_x f|| \leq \lambda$ si et seulement si f vérifie

$$||f(x) - f(y)|| \leq \lambda||x - y||, \quad \forall x, y \in U.$$

2) Montrer que si f vérifie $||f(x) - f(y)|| \geq \lambda||x - y||, \ \forall x, y \in U$, alors $\sup_{x\in U} ||D_x f|| \geq \lambda$. Donner un exemple pour lequel la réciproque est fausse.

Exercice 10. *Soit E, F deux espaces de Banach et $f : U \to F$ une application continue sur un ouvert $U \subset E$. On suppose que f est différentiable en tout point de $U \setminus \{a\}$ et que*

$$x \in U \mapsto Df_x \in \mathcal{L}(E, F)$$

admet une limite lorsque $x \to a$ (qu'est-ce que cela veut dire ?). Montrer qu'alors f est également différentiable au point a et que

$$Df_a = \lim_{x\to a} Df_x.$$