Calcul Différentiel

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer les dérivées partielles de :

$$g(x,y) = f(x+y) \qquad h(x,y) = f(x^2+y^2) \qquad k(x,y) = f(xy)$$

Exercice 2 Soit $a \in \mathbb{R}^2$ fixé ; l'application $x \to \langle x, a\rangle$ de $\mathbb{R}^2$ usuel dans $\mathbb{R}$ est-elle continue, admet-elle des dérivées partielles, celles-ci sont elles continues ?

Exercice 3 Montrer qu'une norme N sur $\mathbb{R}^2$ ne peut avoir des dérivées partielles qui existent et qui soient continues en 0.

Exercice 4 On définit la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$ et que f est continue mais pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 5 Calculer les dérivées partielles (d'ordre un) de la fonction $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ en $(2,1)$.

Exercice 6 Calculer $Df\,(1,1)$, si $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$.

Exercice 7 Calculer la dérivée de la fonction $F(x,y,z) = \ln\left(e^x + e^y + e^z\right)$ à l'origine dans une direction formant avec les axes de coordonnées x, y, z les angles α, β, γ.

Exercice 8 On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme Euclidienne que l'on note $\|\cdot\|_2$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

1. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, calculez $f(x+h, y+k) - f(x,y)$.
2. On définit pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'application (dépendant de x et y)

$$\begin{array}{llll} L_{x,y} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (h,k) & \mapsto & \begin{pmatrix} 2\,x + y \\ 2\,y + x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = (2\,x+y)\,h + (2\,y+x)\,k. \end{array}$$

   Montrez que $L_{x,y}$ est continue.
3. Montrez que $L_{x,y} = Df(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 9 Calculer la différentielle des fonctions suivantes

$$\begin{array}{llll} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & e^x \sin(y), \end{array} \qquad \begin{array}{llll} g : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x^2 e^{yz} h(y, zx), \end{array}$$

où h est une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.