Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques LMF04, Licence 3ème année, Mathématiques Fondamentales

Calcul Différentiel - Examen du 7 septembre 2007

Durée : 3 heures

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

Question de cours. Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $C^1(U)$. Énoncer la definition d'une submersion et d'une immersion f en $a \in U$.

Exercice 1

(a) Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Dire si l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \mapsto & f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \end{array}$$

est une submersion en (x_0, y_0, z_0). Justifier la réponse.

(b) Montrer que l'ensemble $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux. Dessiner S^2.

(c) Déterminer les points de la surface S^2 vérifiant la condition d'extrémalité de Lagrange pour la fonction $h(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2x$.

(d) En déduire la valeur minimale et maximale de la restriction de $h(x, y, z)$ à S^2.

(e) Soit R une constante réelle. Montrer que si $R > -1$, l'ensemble

$$C_R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2x = R\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux (une surface). Dessiner C_R.

(f) Montrer que si $R > -1$ et $R \neq 0, 8$, l'ensemble $S^2 \cap C_R \subset \mathbb{R}^3$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension un (une courbe).

Exercice 2 On considère le problème de Cauchy ;

$$x' = t^3/2 + tx, \; x(0) = 0. \tag{1}$$

(a) Montrer que le problème de Cauchy (1) admet une unique solution au voisinage de $x = 0$.

(b) Soit E l'espace vectoriel $C^0([-1, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[-1, 1]$, qui s'annulent en 0. On munit E de la norme $\|x\| = \sup_{t \in [-1,1]} |x(t)|$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : E & \to & E \\ x(t) & \mapsto & \Phi(x)(t) = x(0) + \int_0^t (s^3/2 + sx(s))ds \end{array}$$

est une contraction.

(c) En remplaçant le problème de Cauchy (1) par l'équation intégrale $x(t) = \Phi(x)(t)$ expliciter la construction d'une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_0 = 0$, convergeant vers la solution x de (1) dans l'espace E. Calculer x_1 et x_2.

Exercice 3 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer un système fondamental de solutions du système différentiel linéaire $x' = Ax, \; x \in \mathbb{R}^2$. Calculer la résolvante $\mathcal{R}(t, t_0)$.

barème : 2+1+1+2+1+1+1+1+3+3+4=20