Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques LMF04, Licence 3ème année, Mathématiques Fondamentales

Calcul Différentiel - Examen terminal du 27 mai 2009
Durée : 3 heures
Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

Question de cours. Soient E et F deux espaces normés réels, Ω un ouvert non-vide de E et $f : \Omega \to F$ une application. Énoncer, si $a \in \Omega$, les définitions de différentiabilité de f en a et de $Df(a)$.

Exercice 1 Soient $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme

$$E \ni f \to \|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x|$$

et

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \Phi(f) \quad \text{ où } \Phi(f)(x) = \int_0^x f^3(s)\, ds\ . \end{array}$$

Rappelons que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et que tout sous-ensemble B de E est un espace métrique complet. Expliquer pourquoi $\Phi(f) \in E$.

(a) Montrer que Φ est différentiable sur E et déterminer la différentielle $D\Phi(f)$ pour f dans E.

(b) Montrer que Φ est une application de classe C^1 sur E.

(c) Montrer que Φ est 2-fois différentiable sur E et déterminer la différentielle seconde $D^2\Phi(f)$ pour f dans E.

(d) Soit $B = \{f \in E : \|f\| \leqslant 1/6\}$. Montrer que $\Phi(B) \subset B$ et que $\Phi : B \to B$ est une contraction. En déduire que Φ a un seul point fixe dans B.

Exercice 2 Soient a, b, c des constantes réelles telles que $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

(a) Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Dire si les applications

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(x,y,z) = x^2 + y^2 + c^2 \end{array} , \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & g(x,y,z) = ax + by + cz \end{array}$$

sont des submersions en $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Justifier la réponse.

(b) Montrer que la sphère $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux.

(c) Calculer le plan tangent $T_{(x_0,y_0,z_0)}S^2$ à la sphère S^2 en (x_0, y_0, z_0).

(d) Déterminer les points de la surface S^2 vérifiant la condition d'extrémalité de Lagrange pour la fonction g.

(e) En déduire la valeur minimale m et maximale M de la restriction de g à S^2.

(f) Soit R une constante réelle. Montrer que le plan

$$P_R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = R\}$$

est tangent à la sphère S^2 si et seulement si $R = m$ ou $R = M$ (faire un dessin).