Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques LMF04, Licence $3^{\text{ème}}$ année, Mathématiques Fondamentales

Calcul Différentiel - Examen terminal du 29 mai 2007

Durée : 3 heures

Aucun document ni instrument de calcul n'est autorisé.

Question de cours. Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $C^1(U)$. Énoncer la definition d'une submersion et d'une immersion f en $a \in U$.

Exercice 1

(a) Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Dire si l'application

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x \end{array}$$

est une submersion en (x_0, y_0). Justifier la réponse.

(b) Montrer que l'ensemble $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x = 0\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^2$ de dimension un (une courbe). Dessiner S^1.

(c) Montrer que l'ensemble $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension deux (une surface). Dessiner S^2.

(d) Calculer les espaces tangents $T_{(0,0)}S^1$, $T_{(0,0,1)}S^2$.

(e) Montrer que l'ensemble

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - 2x = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$ de dimension un (une courbe).

(f) Déterminer les points de la courbe C vérifiant la condition d'extrémalité de Lagrange pour la fonction $h(x,y,z) = x$.

(g) En déduire la valeur minimale et maximale de la restriction de $h(x,y,z) = x$ à C.

Exercice 2 On considère le problème de Cauchy ;

(1) $$x' = t^2 + tx, \;\; x(0) = 0.$$

(a) Montrer que le problème de Cauchy (1) admet une unique solution au voisinage de $x = 0$.

(b) Soit E l'espace vectoriel $C^0([-1,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[-1,1]$, qui s'annulent en 0. On munit E de la norme $\|x\| = \sup_{t\in[-1,1]} |x(t)|$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : E & \to & E \\ x(t) & \mapsto & \Phi(x)(t) = x(0) + \int_0^t (s^2 + sx(s))ds \end{array}$$

est une contraction. En remplaçant le problème de Cauchy (1) par l'équation intégrale $x(t) = \Phi(x)(t)$ expliciter la construction d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $x_0 = 0$ convergeant vers la solution x de (1) dans l'espace E. Montrer que cette convergence est uniforme sur $[-1,1]$.

(c) Montrer que $x_k(t)$ est la somme partielle d'une série entière (laquelle ?) dont on précisera le rayon de convergence. En déduire la solution maximale du problème de Cauchy (1).

Exercice 3 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Calculer les valeurs propres de A puis un système fondamental de solutions du système différentiel linéaire $x' = Ax, \; x \in \mathbb{R}^2$. Calculer la résolvante $\mathcal{R}(t, t_0)$.

barème : 2+1+1+1+1+1+1+2+1+1+4+2+3=20