Université de Toulouse III, UFR MIG - Département de Mathématiques LMF04, Licence $3^{\text{ème}}$ année, Mathématiques Fondamentales

Exercice 1 (éclatement d'un point double)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3. On suppose que $f(0,0) = 0$, $Df(0,0) = 0$. Pour $x, t \in \mathbb{R}, x \neq 0$, soit

$$F(x,t) = \frac{f(x,tx)}{x^2}.$$

1. (1) Appliquer à f la formule de Taylor avec reste intégral à ordre un à l'origine. En déduire que F se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $F(0,t)$.
   On suppose que la forme quadratique $D^2f(0,0)(h,h)$, $h \in \mathbb{R}^2$, est de signature $(+,-)$, c'est à dire
   $$D^2f(0,0)(h,h) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2, b^2 - ac \neq 0 \text{ avec } c \neq 0.$$
2. Montrer que l'équation $F(0,t) = 0$ admet deux racines réelles distinctes t_1 et t_2, et que l'équation $F(x,t) = 0$ définit deux fonctions implicites $t = \varphi_1(x)$, resp. $t = \varphi_2(x)$, au voisinage de $x = 0$, $t = t_1$, resp. $x = 0$, $t = t_2$.
3. En déduire qu'au voisinage de l'origine on a
   $$f(x, x\varphi_1(x)) = 0, \quad f(x, x\varphi_2(x)) = 0.$$
   Remarque. On peut démontrer qu'au voisinage de l origine
   $$(f(x,y) = 0) \Leftrightarrow (y = x\varphi_1(x) \text{ ou } y = x\varphi_2(x)).$$
4. On pose $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x^3 + y^3$. Calculer $\varphi_1(0), \varphi_2(0), \varphi_1'(0), \varphi_2'(0)$. Dessiner l'ensemble $\{(x,y) : f(x,y) = 0\}$ au voisinage de l'origine. On précisera les tangentes au point double $(0,0)$ et la position de la courbe $y = x\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$, par rapport à ces tangentes.

Exercice 2 (examen 2009). Soient $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme

$$E \ni f \to \|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x|$$

et

$$\begin{array}{llll} \Phi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \Phi(f) \quad \text{où } \Phi(f)(x) = \int_0^x (\frac{1}{2} f^2(s) + f(s) + 1)\, ds\ . \end{array}$$

Rappelons que $(E, \|.\|)$ est un espace de Banach et que tout sous-ensemble B de E est un espace métrique complet. Expliquer pourquoi $\Phi(f) \in E$.

(a) Montrer que Φ est différentiable sur E et déterminer la différentielle $D\Phi(f)$ pour f dans E.

(b) Montrer que Φ est une application de classe C^1 sur E.

(c) Montrer que Φ est 2-fois différentiable sur E et déterminer la différentielle seconde $D^2\Phi(f)$ pour f dans E.

(d) Montrer que $\forall f, h \in E$

$$\Phi(f+h) = \Phi(f) + D\Phi(f)(h) + \frac{1}{2} D^2\Phi(f)(h,h).$$

Calculer $D^k\Phi(f)$, $k \geqslant 3$.