Université P. Sabatier (Toulouse III) — Licence Math. Fond. L3

Devoir de Calcul Différentiel — À rendre le 26 Janvier 2009.

1. Deux applications différentiables $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ et $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ sont dites *transverses* si en tout point où elles se rencontrent, les images des différentielles sont transverses:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q, \quad f(x) = g(y) \Rightarrow \operatorname{Im} D_x f + \operatorname{Im} D_y g = \mathbb{R}^n$$

(remarque: la somme n'est pas nécessairement directe, et par ailleurs, si elles ne se rencontrent en aucun point, elles sont transverses)

On considère les applications suivantes (où r est un réel ≥ 0):

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (s,t) & \mapsto & \begin{pmatrix} \sin s \cos t \\ \sin s \sin t \\ \cos s \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g_r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \mapsto & \begin{pmatrix} r\cos u \\ r \sin u \\ v \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Reconnaître les images de f et de g_r. Les représenter sur un même dessin (on fera trois dessins correspondant à $r = 1/2$, $r = 1$ et $r = 2$).

   (b) Justifier la différentiabilité de f et g_r, et calculer leurs différentielles.

   (c) Pour quelles valeurs de r f et g_r sont-elles transverses?

   (d) Soit ϕ une application différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans lui même dont la différentielle en tout point est inversible:

   $$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad D_x\phi \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

   Montrer que "ϕ préserve la transversalité", c'est à dire que deux applications différentiables f et g à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ sont transverses si et seulement si $\phi \circ f$ et $\phi \circ g$ le sont.

2. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de U, et v un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On dit que f est dérivable en x_0 dans la direction de v si la fonction $h(t) = f(x_0 + tv)$, définie au voisinage de $t = 0$ est dérivable en 0. La dérivée $h'(0)$ est alors notée $\partial_v f(x_0)$.

   (a) Vérifier que si f est différentiable en x_0, f a des dérivées dans toutes les directions et que $\partial_v f(x_0) = D_{x_0} f(v)$

   (b) Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_{p,q} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
   Montrer que $f_{1,2}$ admet des dérivées dans toutes les directions à l'origine, mais qu'elle n'y est pas différentiable.
   Pour quelles valeurs de (p,q) f est-elle continue? de classe C^1?