Devoir de Calcul Différentiel (L3 - Univ. Toulouse III)
Jean-Paul Calvi
12 Mars 2007

Le devoir est à remettre au plus tard le **Lundi 26 Mars à 12h00** au secrétariat. Les copies remises en retard, quelle que soit la raison du retard, ne seront pas corrigées. Les exercices portent sur le programme correspondant aux quatre premières feuilles de travaux dirigés. Ce texte est disponible en ligne à l'adresse **http://www.picard.ups-tlse.fr/~calvi/ens.html** et le corrigé y sera accessible dans l'après-midi du 26 Mars [1].

1

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\phi(x) = (\phi_1(x),\phi_2(x),\phi_3(x))$ avec

$$\phi_1(x) = \frac{1 - x_1^2 - x_2^2}{1 + x_1^2 + x_2^2},\ \phi_2(x) = \frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_2^2} \text{ et } \phi_3(x) = \frac{2x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} \quad x = (x_1,x_2). \qquad \text{(E1)}$$

1.1. Montrer que ϕ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer le rang de l'application $D\phi(x)$ en tout point x de $\mathbb{R}^2$. (On rappelle que le rang d'une application linéaire est par définition la dimension de son ensemble image.)

1.2. On désigne par S la sphère de centre $0 = (0,0,0)$ et de rayon 1,

$$S = \{y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\} \qquad \text{(E2)}$$

et $P = (-1,0,0) \in S$. Montrer que pour tout $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(x)$ est l'intersection de S avec la droite passant par P et le point M_x de coordonnées $(0,x_1,x_2)$ et montrer que ϕ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $S \setminus \{P\}$ (la sphère privée du point P).

1.3. Soit Π la plan d'équation $x_1 = -1$ dans $\mathbb{R}^3$. On considère la fonction $\eta : \mathbb{R}^3 \setminus \Pi \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\eta(y_1,y_2,y_3) = \left(\frac{x_2}{1+x_1},\frac{x_3}{1+x_1}\right). \qquad \text{(E3)}$$

1.3.1. Etudier la différentiabilité de η.

1.3.2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a $(\eta \circ \phi)(x) = x$.

1.4. Trouver une fonction ϕ' et une fonction η' pour lesquelles le rôle précédemment joué par P est joué par $P' = (1,0,0)$.

1.5. Soit $a \in S$, $a \notin \{P,P'\}$, et $x_a = \eta(a)$. Montrer que $f = \eta' \circ \phi$ est un difféomorphisme au voisinage de x_a.

Note. Les fonctions ϕ et ϕ' permettraient de définir sur la sphère S une structure de *variété différentielle*. Cette structure permet à son tour d'étendre la notion de fonction différentiable à des fonctions définies sur des ensembles plus complexes que les ouverts des espaces $\mathbb{R}^n$; elle joue un rôle fondamental dans les mathématiques modernes. Seule la notion de sous-variété est au programme du cours. En utilisant que l'application ϕ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $S \setminus \{P\}$ (pourquoi?) et une autre propriété établie dans l'exercice (laquelle?), et des propriétés similaires pour ϕ', on s'assure que S est aussi une sous-variété dans $\mathbb{R}^3$ (de dimension 2).

2

2.1. Soit f est une fonction réelle définie sur un intervalle ouvert (non vide) I de $\mathbb{R}$ et α une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, $\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ pour $x = (x_1,\dots,x_n)$.
On pose $g = f \circ \alpha$. On suppose que $x_0 \in \mathbb{R}^N$ est tel que $\alpha(x_0) \in I$.

---

[1] Les étudiants qui pensent identifier une erreur dans l'énoncé doivent d'abord s'assurer que celle-ci n'a pas déjà été signalée (et corrigée) sur la page **http://www.picard.ups-tlse.fr/~calvi/ens.html** et, si non, me contacter par courrier électronique à calvi@picard.ups-tlse.fr.

2.1.1. Montrer que g est définie sur un voisinage ouvert de x_0.

2.1.2. Montrer si f est d fois dérivable au point $\alpha(x_0)$ alors g est d fois différentiable au point x_0 et

$$D^d g(x_0)(h_1,h_2,\cdots,h_d) = f^{(d)}(x_0)\,\alpha(h_1)\cdots\alpha(h_d) \quad h_i \in \mathbb{R}^n,\, i = 1,\ldots,d, \tag{E4}$$

où $f^{(d)}(x_0)$ désigne la d-ème dérivée de f. Que dire des dérivées partielles de g?

2.1.3. Déterminer, à l'aide du résultat précédent, les différentielles en 0 de la fonction

$$\mathcal{E} : x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \to \exp(x_1 + \cdots + x_n) \in \mathbb{R}. \tag{E5}$$

Retrouver ce résultat en utilisant les propriétés particulières de la fonction exponentielle.

2.2. Soit, plus généralement, A un application affine de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ c'est-à-dire une application de la forme $A(x) = L(x) + v$ où $v \in \mathbb{R}^m$ et L est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

2.2.1. Quelles sont les différentielles (de tout ordre) de A en $x_0 \in \mathbb{R}^n$?

2.2.2. Sous quelles hypothèses sur f et sur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la fonction $g = f \circ A$ sera-t-elle d fois différentiable au point x_0?

Dans la suite on suppose que ces hypothèses sont vérifiées.

2.3. Donner une relation entre les différentielles d'ordre d de f et celles de g, puis une relation entre les dérivées partielles de f et de g.

2.4. On désigne, lorsqu'il existe, par $\mathbf{T}_d(h,a)$ le polynôme de Taylor de la fonction h au point a à l'ordre d. Avec les notations précédentes, montrer que

$$\mathbf{T}_d(f \circ A,x_0) = \mathbf{T}_d(f,A(x_0)) \circ A. \tag{E6}$$

2.5. Application. Montrer que si $f = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^∞ *symétrique* alors tous ses polynômes de Taylor à l'origine sont aussi des polynômes symétriques.
On rappelle que f symétrique signifie que pour toute permutation σ de $\{1,2,\ldots,n\}$ et tout $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\ldots,x_{\sigma(n)}). \tag{E7}$$

2.6. Les propriétés démontrées s'étendent-elles au cas où $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ sont remplacés par des espaces de Banach quelconques.