UNIVERSITE PAUL SABATIER — Licence de Mathématiques Fondamentales

Devoir de Calcul Différentiel — A rendre le 15 février 2007

Partie I : Différentielle du déterminant

Soit n un nombre entier strictement positif.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices $n \times n$ réelles, I_n la matrice unité, $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices inversibles, det la fonction déterminant et tr la fonction trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note ${}^tM$ la transposée de M et $com(M)$ la comatrice de M.

On rappelle que $M\ {}^tcom(M) = {}^tcom(M)\ M = det(M)I_n$, que $\exp(M) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}$ et que la fonction $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \exp(xM) \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ et vérifie $h'(x) = M\ \exp(xM)$

1. Montrer que det est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D\ det\ (I_n)\ .\ H = tr(H)$.

3. Soit $X \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D\ det\ (X)\ .\ H = tr({}^tcom(X)\ H)$.

4.a. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Quel est le degré du polynôme caractéristique de M ? Montrer qu'il existe un nombre entier $k_0 > 0$ tel que, pour tout entier $k \geqslant k_0$, $M - \dfrac{1}{k} I_n$ soit une matrice inversible. En déduire que $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.b. L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \\ X & \longmapsto & D\ det(X) \end{array} \right.$ est-elle continue ? (Justifier brièvement)

4.c. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application linéaire $g_X \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ H & \longmapsto & tr({}^tcom(X)\ H) \end{array} \right.$ peut se représenter par une matrice G_X. Combien de lignes et de colonnes possède la matrice G_X ? Que peut-on dire des coefficients de G_X ? L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \\ X & \longmapsto & g_X \end{array} \right.$ est-elle continue ? (Justifier brièvement)

4.d. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D\ det\ (X)\ .\ H = tr({}^tcom(X)\ H)$

5. Application : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = det\big(\exp(xA)\big)$.

5.a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer la différentielle de f en x.

5.b. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par f ? Que vaut $f(0)$?

5.c Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \exp\big(x\ tr(A)\big)$. En déduire que $det\big(\exp(A)\big) = \exp\big(tr(A)\big)$.

Partie II : Différentielle en dimension infinie

On note I le segment $[0, 1]$, F l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et E le sous-espace de F formé des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et nulles en 0.
Pour tout $x \in F$, on pose $||x||_F = \sup_{t \in I} |x(t)|$ et, pour tout $x \in E$, on pose $||x||_E = \sup_{t \in I} |x'(t)|$.
On considère l'application $f : E \longrightarrow F$ définie par $f(x) = x' + x^2$.

1. Montrer que $||.||_F$ est une norme sur F et que $||.||_E$ est une norme sur E.
Dorénavant, on munit E de la norme $||.||_E$, F de la norme $||.||_F$ et $\mathcal{L}(E, F)$ (l'espace des applications linéaires continues de E dans F) de la norme d'application linéaire continue.

2. Montrer que $\forall x \in E\ \ ||x||_F \leqslant ||x||_E$ et que $\forall x \in F\ \forall y \in F\ \ ||xy||_F \leqslant ||x||_F ||y||_F$.

3. Soit $a \in E$. Montrer que f est différentiable en a et calculer la différentielle de f en a.

4. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.