Correction du devoir de Calcul Différentiel

Partie I : Différentielle du déterminant

Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont équivalentes. Choisissons de munir $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme infinie (c'est-à-dire $||A|| = \sup |a_{ij}|$).

1. Comme $det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$, le déterminant est une fonction polynomiale des coefficients de la matrice, donc det est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$).

2. Pour calculer la différentielle du déterminant en I_n, nous allons calculer $det(I_n + H)$ pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Il existe de nombreuses méthodes pour effectuer ce calcul. En voici une :
Les matrices les plus simples étant les matrices diagonales, calculons $det(I_n + H)$ lorsque H est diagonale.

Pour une matrice diagonale H, on a $det(I_n + H) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (1 + h_{ii})$, d'où

$$det(I_n + H) = 1 + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} h_{ii} + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} h_{i_1 i_1} h_{i_2 i_2} + \dots + \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} h_{i_1 i_1} h_{i_2 i_2} \dots h_{i_k i_k} + \dots + h_{11} h_{22} \dots h_{nn}$$

d'où $det(I_n + H) = 1 + tr(H) + g(H)$ avec $g(H) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} h_{i_1 i_1} h_{i_2 i_2} \dots h_{i_k i_k}$

Comme $|g(H)| \leqslant \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} |h_{i_1 i_1}|\, |h_{i_2 i_2}| \dots |h_{i_k i_k}| \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} ||H||^k$,

on a $det(I_n + H) = det(I_n) + tr(H) + g(H)$ avec $\dfrac{|g(H)|}{||H||} \xrightarrow[H \longrightarrow 0]{} 0$.

Calculons maintenant $det(I_n + H)$ pour une matrice H quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a, en posant $A = I_n + H$, $det(I_n + H) = det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$

d'où $det(I_n + H) = \varepsilon(Id) a_{11} a_{22} \dots a_{nn} + b(H)$ avec $b(H) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{Id\}} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$

Or $\varepsilon(Id) a_{11} a_{22} \dots a_{nn} = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (1 + h_{ii}) = 1 + tr(H) + g(H)$ avec $\dfrac{|g(H)|}{||H||} \xrightarrow[H \longrightarrow 0]{} 0$.
et, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{Id\}$, il existe i tel que $\sigma(i) \neq i$, et en posant $j = \sigma(i)$, on a[1] aussi $\sigma(j) \neq j$,
d'où, $|a_{i\sigma(i)}| = |h_{i\sigma(i)}| \leqslant ||H||$ et $|a_{j\sigma(j)}| = |h_{j\sigma(j)}| \leqslant ||H||$.
De plus[2], pour $k \notin \{i, j\}$, on a $\begin{cases} |a_{k\sigma(k)}| = |h_{k\sigma(k)}| \leqslant ||H|| \leqslant 1 + ||H|| & \text{si } \sigma(k) \neq k \\ |a_{k\sigma(k)}| = |1 + h_{kk}| \leqslant |1| + |h_{kk}| \leqslant 1 + ||H|| & \text{si } \sigma(k) = k \end{cases}$
d'où, $|\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}| \leqslant \big(1 + ||H||\big)^{n-2} ||H||^2$
On déduit de l'inégalité précédente que

$$|b(H)| \leqslant \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{Id\}} |\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}| \leqslant (n! - 1)\big(1 + ||H||\big)^{n-2} ||H||^2, \text{ d'où } \frac{|b(H)|}{||H||} \xrightarrow[H \longrightarrow 0]{} 0.$$

En posant $R(H) = g(H) + b(H)$, on obtient[3] $det(I_n + H) = det(I_n) + tr(H) + R(H)$ avec $\dfrac{|R(H)|}{||H||} \xrightarrow[H \longrightarrow 0]{} 0$

et $H \longmapsto tr(H)$ linaire (et donc[4] continue) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. On retrouve alors que det est différentiable en I_n et on obtient que, pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad D\ det\ (I_n)\ .\ H = tr(H)$.

Remarque : Comme on sait déjà, d'après 1., que det est différentiable en I_n, on aurait aussi pu :

∘ (méthode 2) se placer dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer les dérivées partielles de det, puis en déduire $D\ det(I_n)$.

∘ (méthode 3) remarquer que $D\ det\ (I_n)\ .\ H = \displaystyle\lim_{t \longrightarrow 0} \frac{det(I_n + tH) - det(I_n)}{t}$.

[1] car σ est une bijection et j est déjà l'image de i par σ

[2] Remarque : on a, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $|\varepsilon(\sigma)| = 1$.

[3] car $det(I_n + H) = 1 + tr(H) + g(H) + b(H) = det(I_n) + tr(H) + R(H)$, $\dfrac{|g(H)|}{||H||} \xrightarrow[H \longrightarrow 0]{} 0$ et $\dfrac{|b(H)|}{||H||} \xrightarrow[H \longrightarrow 0]{} 0$

[4] car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie

3. Soit $X \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$. Pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a
$det(X+H) = det\big(X(I_n + X^{-1}H)\big) = det(X)det((I_n + X^{-1}H)) = det(X)\Big(det(I_n) + tr(X^{-1}H) + R(X^{-1}H)\Big)$
d'où[5] $det(X+H) = det(X) + tr(det(X)X^{-1}H) + det(X)R(X^{-1}H) = det(X) + tr({}^t com(X)\ H) + S(H)$
avec $S(H) = det(X)R(X^{-1}H)$. L'application $H \longmapsto tr({}^t com(X)\ H)$ est à nouveau linéaire (et donc continue) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ et $\dfrac{|S(H)|}{||H||} = |det(X)| \dfrac{|R(X^{-1}H)|}{||X^{-1}H||} \dfrac{||X^{-1}H||}{||H||}$. Or $N(A) = ||X^{-1}A||$ définie une norme[6] sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et comme toute les normes sont équivalentes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $a\ ||A|| \leqslant N(A) \leqslant b\ ||A||$. Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $a\ ||A|| \leqslant ||X^{-1}A|| \leqslant b\ ||A||$.
On en déduit alors que $\dfrac{|S(H)|}{||H||} \leqslant b|det(X)| \dfrac{|R(X^{-1}H)|}{||X^{-1}H||}$ avec[7] $\dfrac{|R(X^{-1}H)|}{||X^{-1}H||} \xrightarrow[H \longrightarrow 0]{} 0$, d'où $\dfrac{|S(H)|}{||H||} \xrightarrow[H \longrightarrow 0]{} 0$
Finalement, $det(X+H) = det(X) + tr({}^t com(X)\ H) + S(H)$ avec $\dfrac{|S(H)|}{||H||} \xrightarrow[H \longrightarrow 0]{} 0$ et $H \longmapsto tr({}^t com(X)\ H)$ linéaire continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. On retrouve alors que det est différentiable en X et on obtient que,
pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\quad D\ det\ (X)\ .\ H = tr({}^t com(X)\ H)$.

4.a. Notons P le polynôme caractéristique de M. P est un polynôme de degré n et on a

$$\left(M - \frac{1}{k}I_n \text{ inversible}\right) \Longleftrightarrow \left(det\left(M - \frac{1}{k}I_n\right) \neq 0\right) \Longleftrightarrow \left(P\left(\frac{1}{k}\right) \neq 0\right)$$

Comme P est un polynôme de degré n, il possède au plus n racines. Il existe donc au plus n valeurs de k pour lesquelles $\dfrac{1}{k}$ est racine de P. On en déduit l'existence d'un entier $k_0 > 0$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$, $P\left(\dfrac{1}{k}\right) \neq 0$.
Pour tout $k \geqslant k_0$, on a alors $M - \dfrac{1}{k}I_n$ inversible. La suite $\left(M - \dfrac{1}{k}I_n\right)_{k \geqslant k_0}$ est alors une suite d'éléments de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ qui converge[8] vers M. Donc $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4.b. L'application $\left|\begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \\ X & \longmapsto & D\ det(X) \end{array}\right.$ est continue $\big($on a déjà vu en 1 que det est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)$.

4.c. La matrice G_X possde 1 ligne et n^2 colonnes. De plus, comme ses coefficients sont des fonctions polynomiales des coefficients de la matrice X, l'application $\left|\begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \\ X & \longmapsto & g_X \end{array}\right.$ est continue.

4.d. D'après 3, $\left|\begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \\ X & \longmapsto & D\ det(X) \end{array}\right.$ et $\left|\begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \\ X & \longmapsto & g_X \end{array}\right.$ coïncident sur $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$.
Ces deux fonctions étant continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ étant dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que ces deux fonctions coïncident partout. Donc, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D\ det(X) = g_X$ et par conséquent, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $D\ det\ (X)\ .\ H = tr({}^t com(X)\ H)$

5.a. Considérons la fonction $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $u(x) = exp(xA)$. On a $f = det \circ u$ avec $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc, par composition, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Par composition, on a $Df(x) = D(det \circ u)(x) = \big(D\ det\big(u(x)\big)\big) \circ (Du(x))$, d'où, pour[9] tout $h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rclcl} Df(x).h & = & \big(\big(D\ det\big(u(x)\big)\big) \circ (Du(x))\big)\ .h & = & D\ det\big(u(x)\big).\big(Du(x).h\big) \\ & = & D\ det\big(\exp(xA)\big).\big(hA\exp(xA)\big) & = & tr\big({}^t com\big(\exp(xA)\big)hA\exp(xA)\big) \\ & = & tr\big(h\ A\ \exp(xA){}^t com\big(\exp(xA)\big)\big) & = & tr\big(h\ A\ det\big(\exp(xA)\big)\ I_n\big) \\ & = & tr\big(h\ det\big(\exp(xA)\big)\ A\big) & = & h\ det\big(\exp(xA)\big)\ tr(A) \end{array}$$

d'où

$$Df(x).h \ = \ h\ tr(A)\ f(x)$$

[5]car ${}^t com(X)\ X = det(X)I_n$, d'où ${}^t com(X) = det(X)\ X^{-1}$
[6]on vérifie facilement que $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$, $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$ et $N(0) = 0$.
De plus,si $N(A) = 0$,alors $||X^{-1}A|| = 0$,d'où $X^{-1}A = 0$, d'où $A = X\ X^{-1}A = X\ 0 = 0$.Donc N est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
[7]par composition de limite, car $\dfrac{|R(M)|}{||M||} \xrightarrow[M \longrightarrow 0]{} 0$ et $X^{-1}H \xrightarrow[H \longrightarrow 0]{} 0 \quad$ (car $||X^{-1}H|| \leqslant b||H||$)
[8]car $\left|\left|M - \left(M - \dfrac{1}{k}I_n\right)\right|\right| = \left|\left|\dfrac{1}{k}I_n\right|\right| = \left|\dfrac{1}{k}\right|\ ||I_n|| = \dfrac{1}{k} \xrightarrow[k \longrightarrow +\infty]{} 0$
[9]on utilise le fait que $tr(MN) = tr(NM)$. $\big($NB : ici, on a aussi $A\exp(xA) = \exp(xA)A\big)$.

5.b. Comme on a aussi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}$, $Df(x).h = h\, f'(x)$, on obtient, en prenant $h = 1$, $f'(x) = tr(A)\ f(x)$. La fonction f est donc solution de l'équation différentielle $y'(x) - tr(A)\ y(x) = 0$.
De plus, $f(0) = det\big(\exp(0\ A)\big) = det\big(\exp(0)\big) = det(I_n) = 1$.

5.c Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et comme f est solution de l'équation différentielle $y'(x) - tr(A)\ y(x) = 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = \alpha \exp\big(tr(A)\ x\big)$. En outre, $1 = f(0) = \alpha \exp\big(0\ tr(A)\big) = \alpha \exp\big(0\big) = \alpha$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = \exp\big(x\ tr(A)\big)$. En particulier, pour $x = 1$, on obtient $det\big(\exp(A)\big) = \exp\big(tr(A)\big)$.

Partie II : Différentielle en dimension infinie

1. Pour tout $x \in F$, pour tout $y \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
- $||x+y||_F \leqslant ||x||_F + ||y||_F$, car $\forall t \in I\ \ |(x+y)(t)| = |x(t)+y(t)| \leqslant |x(t)| + |y(t)| \leqslant ||x||_F + ||y||_F$
- $||\lambda x||_F = |\lambda|\ ||x||_F$, car $\forall t \in I\ \ |(\lambda x)(t)| = |\lambda x(t)| = |\lambda|\ |x(t)|$
- $||x||_F \Longleftrightarrow x = 0$, car $||x||_F = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in I\ \ |x(t)| = 0 \Longleftrightarrow \forall t \in I\ \ x(t) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

Donc $||.||_F$ une norme sur F

Pour tout $x \in E$, pour tout $y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :
- $||x+y||_E \leqslant ||x||_E + ||y||_E$ (démonstration analogue à la précédente en remarquant que $(x+y)' = x' + y'$)
- $||\lambda x||_E = |\lambda|\ ||x||_E$ (démonstration analogue à la précédente en remarquant que $(\lambda x)' = \lambda x'$)
- $||x||_E \Longleftrightarrow x = 0$, car $x = 0 \Longrightarrow x' = 0 \Longrightarrow ||x||_E = 0$ et si $||x||_E = 0$, alors x' nulle sur $[0,1]$, d'où x constante sur $[0,1]$ et comme $x(0) = 0$, x est nulle sur $[0,1]$, c'est-à-dire $x = 0$.

Donc $||.||_E$ une norme sur E

2. Soit $x \in E$. Soit $t \in [0,1]$. On a $x(t) = x(t) - 0 = x(t) - x(0)$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée entre 0 et t à la fonction x qui est $\mathcal{C}^1$ sur I, on obtient, en notant J le segment $[0,t]$ qui est inclus dans I,
$$|x(t)| = |x(t) - x(0)| \leqslant \sup_{s \in J} |x'(s)|\ |t - 0| \leqslant \sup_{s \in I} |x'(s)|\ |t| \leqslant ||x||_E\ |t| \leqslant ||x||_E$$
Ceci étant vrai pour tout $t \in I$, on en déduit que $||x||_F \leqslant ||x||_E$.
Soit $x \in F$ et $x \in F$. On a $xy \in F$ et, pour tout $t \in I$, on a $|(xy)(t)| = |x(t)y(t)| = |x(t)|\ |y(t)| \leqslant ||x||_F ||y||_F$, d'où $||xy||_F \leqslant ||x||_F ||y||_F$. (Remarque : il n'y a pas d'inégalité de ce type avec $||.||_E$)

3. Soit $a \in E$. Pour tout $h \in E$, on a $f(a+h) = (a+h)' + (a+h)^2 = a' + h' + a^2 + 2ah + h^2 = a' + a^2 + h' + 2ah + h^2$.
D'où, en notant $L_a(h) = h' + 2ah$, $\quad f(a+h) = f(a) + L_a(h) + h^2$. L'application L_a est clairement linéaire.
Montrons[10] que L_a est continue. Soit $h \in E$. Pour tout $t \in I$, on a $L_a(h)(t) = h'(t) + 2a(t)h(t)$,
d'où $|L_a(h)(t)| = |h'(t) + 2a(t)h(t)| \leqslant |h'(t)| + 2|a(t)|\ |h(t)| \leqslant ||h||_E + 2||a||_F ||h||_F \leqslant ||h||_E + 2||a||_F ||h||_E$,
d'où $|L_a(h)(t)| \leqslant (1+2||a||_F)||h||_E$. Ceci étant vrai pour tout $t \in I$, on en déduit que $||L_a(h)||_F \leqslant (1+2||a||_F)||h||_E$.
Par conséquent, L_a est bien une application linéaire continue de E dans F.
De plus, $||h^2||_F = ||h\ h||_F \leqslant ||h||_F\ ||h||_F \leqslant ||h||_E\ ||h||_E \leqslant ||h||_E^2$, donc $||h^2||_F \leqslant ||h||_E^2$
On en déduit[11], en posant $R(h) = h^2$, que $f(a+h) = f(a) + L_a(h) + R(h)$ avec L_a linéaire et continue de E dans F et $\dfrac{||R(h)||_F}{||h||_E} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Par conséquent, f est différentiable en a et, pour tout $h \in E$, $Df(a).h = L_a(h) = h' + 2ah$.

4. Notons $||.||_L$ la norme d'application linéaire continue sur $\mathcal{L}(E,F)$. D'après la question 3, f est différentiable sur E
Pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E $\left(\text{c'est-à-dire pour montrer que } \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(E,F\big) \\ a & \longmapsto & Df(a) \end{array} \right. \text{ est continue sur} E\right)$,
nous allons montrer que $\left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(E,F\big) \\ a & \longmapsto & Df(a) \end{array} \right.$ est lipschitzienne sur E. Soit $x \in E$ et $y \in E$. Pour tout $h \in E$, on a
$$\Big|\Big|\big(Df(x) - Df(y)\big).h\Big|\Big|_F = ||Df(x).h - Df(y).h||_F = ||(h' + 2xh) - (h' + 2yh)||_F = ||2xh - 2yh||_F = ||(2x - 2y)h||_F$$
et comme $||(2x-2y)h||_F = ||2(x-y)h||_F = 2||(x-y)h||_F \leqslant 2||x-y||_F ||h||_F \leqslant 2||x-y||_E ||h||_E$,
on obtient $\Big|\Big|\big(Df(x) - Df(y)\big).h\Big|\Big|_F \leqslant 2||x-y||_E ||h||_E$.

Par définition de la norme d'application linéaire, on en déduit que $||Df(x) - Df(y)||_L \leqslant 2||x-y||_E$.

Par conséquent, $\left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{L}\big(E,F\big) \\ a & \longmapsto & Df(a) \end{array} \right.$ est continue[12] sur E et donc, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E.

---

[10] Contrairement à la dimension finie, en dimension infinie, les applications linéaires ne sont pas forcément continues

[11] car $\dfrac{||R(h)||_F}{||h||_E} = \dfrac{||h^2||_F}{||h||_E} \leqslant \dfrac{||h||_E^2}{||h||_E} \leqslant ||h||_E$

[12] car elle est lipschitzienne.