Notes de Cours de Calcul Différentiel: 3ème année
sections 1-6

17 février 2010

Table des matières

1 Différentielles

1.1 Définition

Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\Omega \subset E$ un ouvert. l'espace des applications linéaires continues $L : E \to F$ est noté par $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 1 *Une application $f : U \to F$ est dite différentiable au point $a \in \Omega$ s'il existe une application linéaire $L \in \mathcal{L}(E, F)$, telle que*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + R(h)$$

où $||R(h)|| = o(||h||)$.

Notation : on note $Df(a) = L$ la différentielle de f en a. Rappelons que la notations de Landau $||R(h)|| = o(||h||)$ signifie que $||R(h)||$ est "beaucoup plus petit que " $||h||$ au sens

$$\lim_{h \to 0} = \frac{||R(h)||}{||h||} = 0.$$

Proposition 1 *Lorsque la différentielle $Df(a)$ existe, elle est unique.*

Exemple 1. Soit $E = F = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}$.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \Leftrightarrow f(a+h) = f(a) + f'(a).h + o(|h|).$$

Cela signifie que (vu l'unicité) $Df(a)(h) = f'(a).h$. La différentielle $Df(a)$ est une fonction linéaire

$$Df(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

qui s'identifie à un scalaire $f'(a)$, c'est à dire l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ s'identifie à l'espace $\mathbb{R}$.

Exemple 2. Soit $E = \mathbb{R}^m, F = \mathbb{R}, K = \mathbb{R}$ et $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$. Nous avons

$$\begin{aligned} Df(a)(h) &= Df(a)(h_1.e_1 + h_2.e_2 \ldots h_m.e_m) \\ &= h_1.Df(a)(e_1) + h_2.Df(a)(e_2) + \ldots h_m.Df(a)(e_m). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{h_i\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_i+h_i,\ldots,a_m)-f(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_m)}{h_i}$$
$$= \lim_{h_i\to 0}\frac{h_i.Df(a)(e_i)+o(|h_i|}{h_i} \quad = \quad Df(a)(e_i).$$

Par conséquent la dérivée partielle $\partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ de la fonction

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

par rapport à la variable x_i existe et

$$\partial_i f(a) = Df(a)(e_i).$$

Nous en déduisons que

$$Df(a)(h) = h_1.\partial_1 f(a) + h_2.\partial_2 f(a) + \ldots h_m.\partial_m f(a).$$

La différentielle $Df(a)$ est une application linéaire

$$Df(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$

et dans ce contexte on utilise la notation $df(a) = Df(a)$, $da_i = Df(a)(e_i)$. Ainsi

$$df(x) = \sum_{i=1}^{m} \partial_i f(x)\, dx_i. \tag{1}$$

formule que nous utiliserons dans la suite.

Si $\mathbb{R}^m$ est muni d'un produit scalaire $< .,. >$, alors il existe un vecteur unique, noté $grad\, f(a)$ ou $\nabla f(a)$, et appelé gradient de f en a, tel que

$$Df(a)(h) =< grad\, f(a), h > .$$

Naturellement, si $< x, y >= x_1.y_1 + \ldots x_m.y_m$ est le produit scalaire canonique, alors

$$grad\, f = (\partial_1 f(a), \partial_2 f(a), \ldots, \partial_m f(a)).$$

Il convient dans ce cas d'écrire le vecteur gradient comme un vector ligne, de façon à ce que

$$< grad\, f(a), h >= grad\, f(a).h$$

(produit d'un vecteur ligne et d'un vector colonne) et le vecteur-gradient devient un cas particulier de la matrice Jacobienne de décrite dans l'exemple suivant

Exemple 3. Soit $E = R^m, F = \mathbb{R}^n, K = \mathbb{R}$. L'espace $\mathcal{L}(E, F)$ s'identifie à l'espace des matrices réelles de dimension $m \times n$. La différentielle $Df(a)$ s'identifie par conséquent à une matrice, notée $Jac(f)(a)$ ou $J(f)(a)$, qu'on appelle *matrice jacobienne* de f en a

$$Df(a)(h) = Jac(f)(a).h$$

(produit d'une matrice de m colonnes et n lignes avec le vecteur colonne h). On calcule facilement que si f est représentée par un vecteur colonne dont les composants sont f_1, f_2, ..., f_n, alors les vecteurs lignes de la matrice $Jac(f(a)$ sont les vecteurs gradients des fonctions f_i en a

$$Jac(f)(a) = (\partial_j f_i(a))_{i=1,j=1}^{n,m}.$$

1.2 Composition des différentielles

Soient E, F, G trois espaces normés et f, g deux applications

$$f : U \to F, g : V \to G, U \subset E, V \subset F.$$

On suppose que f est différentiable en $a \in U$ et que g est différentiable en $b = f(a) \in V$.

Théorème 1 (différentiation des applications composées)

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a). \tag{2}$$

Démonstration. Les différentielles $Df(a)$, $Dg(f(a))$ sont des applications linéaires continues, ce qui veut dire qu'il existent des constante réelles c_1, c_2 telle que

$$||Df(a)(h)|| \leq c_1||h||, ||Dg(f(a))(h)|| \leq c_2||h||.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
g(f(a+h)) &= g(f(a) + Df(a)(h) + o(||h||)) \\
&= g(f(a)) + Dg(f(a))(Df(a)(h) + o(||h||)) + o(||Df(a)(h) + o(||h||)) \\
&= g(f(a)) + Dg(f(a))(Df(a)(h)) + Dg(f(a))(o(||h||)) + o(||h||) \\
&= g(f(a)) + Dg(f(a))(Df(a)(h)) + o(||h||) \\
&= g(f(a)) + (Dg(f(a)) \circ Df(a))(h) + o(||h||).
\end{aligned}$$

La formule (2) est démontrée.

Corollaire.(Différentiation des fonctions composées) Si $E = \mathbb{R}^p, F = \mathbb{R}^q, G = \mathbb{R}^r$ alors

$$Jac(g \circ f)(a) = Jac(g)(f(a)).Jac(f)(a)$$

Dans le cas particulier $r = 1$ nous avons $g(f(x)) = g(f_1(x), f_2(x), ..., f_q)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_p)$. Notons $y_i = f_i(x), z = g(y)$. D'après la formule (1)

$$dz = \frac{\partial g}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial g}{\partial y_2} dy_2 + \dots \frac{\partial g}{\partial y_q} dy_q \tag{3}$$

$$dy_i = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} dx_2 + \dots \frac{\partial f_i}{\partial x_p} dx_p \tag{4}$$

En substituant (4) dans (3) on obtient

$$dz = (\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_1}) dx_1 + \dots + (\sum_{j=1}^{q} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_p}) dx_p \tag{5}$$

D'un autre coté

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_p} dx_p$$

ce qui implique (en identifiant les coefficients de dx_i)

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial z}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \ i = 1, 2 \dots, p.$$

2 Applications linéaires. Applications de classe C^1.

2.1 Applications Linéaires continues

Soit E, F deux espaces vectoriels normés sur $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$, $L : E \to F$ une application linéaire.

Proposition 2 *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) *L est continue sur E*

(ii) *L est continue en $0 \in E$*

(iii) *L est bornée sur la boule unité de E (i.e. $\sup_{\|x|\leq 1} \|L(x)\| < \infty$)*

(iv) *L est bornée sur la sphère unité (i.e. $\sup_{\|x|=1} \|L(x)\| < \infty$)*

(v) *il existe une constante $M > 0$ telle que $\|L(x)\| \leq M\|x\|$ pour tout $x \in E$.*

La preuve est laissée en exercice.

On désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications K-linéaires *continues*. L'application

$$\begin{array}{rcl} |||.||| : \mathcal{L}(E, F) & \to & \mathbb{R}^+ \\ L & \mapsto & |||L||| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|L(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\| \\ & & = \inf\{M \geq 0 : \|L(x)\| \leq M\|x\|, \forall x \in E\} \end{array}$$

est une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$. Rappelons qu'un espace vectoriel normé est dit complet, ou espace de Banach, si toute suite de Cauchy converge.

Théorème 2 *Si $(F, \|.\|)$ est complet, il en est de même de $(\mathcal{L}(E, F), |||.|||)$.*

Preuve. Soit $(L_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. La suite $(L_n(x))_n$ est de Cauchy dans F est donc converge. Notons sa limite $L(x)$. Ceci est une application linéaire. Nous allons vérifier que L est continue et $L_n \stackrel{|||.|||}{\to} L$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 > 0$ tel que si $m, n \geq n_0$

$$|||L_m - L_n||| < \varepsilon.$$

Il s'en suit que $\|L_m(x) - L_n(x)\| < \varepsilon\|x\|$ et, en passant à la limite $m \to \infty$

$$\|L_n(x) - L(x)\| < \varepsilon\|x\|, \forall n \geq n_0. \tag{6}$$

On en déduit que
$$\|L(x)\| < \varepsilon\|x\| + \|L_n(x)\|$$
et L est une application continue en 0. D'après (6), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors
$$|||L_n - L||| \leq \varepsilon$$
c'est à dire $L_n \stackrel{|||\cdot|||}{\rightarrow} L$. $\square$

Théorème 3 *Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.*

Preuve. Il suffit de considerer le cas $E = K$. Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers 0. Nous avons $L(x_n) = x_n L(1) \to 0$.$\square$

2.2 Applications de classe C^1 et différentielles partielles.

Soit E, F espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to F$.

Définition 2 *On dit que l'application f est de classe C^1 sur U, ou continûment différentiable sur U, si $Df(a)$ existe en tout point $a \in U$ et si l'application linéaire $a \mapsto Df(a)$ est continue de U dans l'espace normé $\mathcal{L}(E, F)$.*

Soit $E = E_1 \times E_2 \times \ldots E_m$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in E$, $f_{a,k} : x_k \mapsto f(a_1, \ldots, x_k, \ldots, a_m)$.

Définition 3 *On dit que l'application f admet une différentielle partielle par rapport à la k-ème variable an a, si la différentielle de l'application $f_{a,k} : E_k \to F$ en a existe. On note cette différentielle*
$$\frac{\partial f}{\partial x_k} \text{ ou } D_k f(a) \text{ ou } \partial_k f(a).$$

Si f est différentiable en a, alors pour tout k $D_k f(a)$ existe et
$$Df(a)(h_1, h_2, \ldots, h_m) = D_1 f(a)(h_1) + D_2 f(a)(h_2) + \cdots + D_m f(a)(h_m).$$

De plus, si f est de classe C^1 sur U, alors pour tout k la différentielle $D_k f(a)$ est continue de U dans l'espace normé $\mathcal{L}(E_k, F)$. La réciproque est vraie aussi

Théorème 4 *L'application f est de classe C^1 sur U si, et seulement si, les différentielles partielles de f existent et sont continues sur U.*

Preuve. Pour simplifier les notations nous supposons que $E = E_1 \times E_2$, le cas général est traité de la même manière. Nous supposons aussi que les différentielles partielles $D_1 f, D_2 f$ existent et sont continues sur U, $a \in U$ est fixé. Nous avons

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) & (7) \\ &\quad + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) & (8) \\ &= D_1(a_1, a_2 + h_2)(h_1) + R_1(h_1; h_2) & (9) \\ &\quad + D_2(a_1, a_2)(h_2) + R_2(h_2). & (10) \end{aligned}$$

Nous avons $\|R_2(h_2)\| = o(\|h_2\|)$ (par définition de différentielle). Pour R_2 on vérifie que $D_1 R_1(0; 0) = 0$. La continuité de la différentielle partielle et le théorème des accroissements finis (voir la section suivante) montrent que $R_1(h_1; h_2) = o(||h||)$.

3 Théorèmes des accroissements finis.

Soit E, F espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to F$. On suppose que f est continue en tout point de l'intervalle

$$[a, b] = \{(1-t)a + tb : t \in]0, 1[\} \subset U$$

et différentiable en tout point de $]a, b[$. Alors

Théorème 5

$$||f(b) - f(a)|| \leq ||b - a|| \sup_{c \in]a,b[} ||Df(c)||.$$

Ce théorème est un corollaire simple du

Théorème 6 *Soit*

$$f : [a, b] \to F, \varphi[a, b] \to \mathbb{R}, [a, b] \subset \mathbb{R}.$$

On suppose que f et φ sont continues sur $[a, b]$ et différentiables sur $]a, b[$, et vérifient

$$||f'(t)|| \leq \varphi'(t), \forall t \in]a, b[.$$

Alors

$$||f(b) - f(a)|| \leq \varphi(b) - \varphi(a).$$

Démonstration. On va montrer que

$$(a < u < v < b) \Rightarrow (||f(v) - f(u)|| \leq \varphi(v) - \varphi(u)).$$

On va raisonner par absurde. Supposons qu'il existent u, v tels que

$$||f(v) - f(u)|| - [\varphi(v) - \varphi(u))] =: E > 0$$

et posons $a_0 = u, b_0 = v$.l'inégalité triangulaire montre que

$$||f(v) - f(\frac{u+v}{2})|| - [\varphi(v) - \varphi(\frac{u+v}{2}))] \geq \frac{E}{2}$$

ou bien

$$||f(\frac{u+v}{2}) - f(u)|| - [\varphi(\frac{u+v}{2})) - \varphi(u)] \geq \frac{E}{2}.$$

Appelons $[a_1, b_1]$ celui des deux segments où l'inégalité est réalisée et réitérons le procédé. On construit ainsi une suite de segments emboîtés $[a_n, b_n]$ tels que

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b_0, b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$$

et

$$||f(b_n) - f(a_n)|| - [\varphi(b_n) - \varphi(a_n))] \geq \frac{E}{2^n}.$$

Il en résulte que les suites $(a_n), (b_n)$ convergent vers la même limite $c \in]a, b[$ et que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{||f(b_n) - f(a_n)|| - [\varphi(b_n) - \varphi(a_n))]}{b_n - a_n} = \frac{||f'(c)||}{\varphi'(c)} \geq \frac{E}{b_0 - a_0}.$$

Théorème 5 est démontré.

Preuve du Théorème 6. Si $g(t) = f((1-t)a + tb)$, alors

$$g'(t) = Df((1-t)a + tb)(b - a)$$

et

$$|g'(t)| \leq ||b - a||. \sup_{c \in]a,b[} ||Df(c)||.$$

On pose $\varphi(t) = t.||b - a||. \sup_{c \in]a,b[} ||Df(c)||$ et on en déduit

$$||f(b) - f(a)|| = ||g(1) - g(0)|| \leq ||\varphi(1) - \varphi(0)|| = ||b - a||. \sup_{c \in]a,b[} ||Df(c)||.$$

4 Point Fixe

Soit X, d un espace métrique complet. Par exemple, $X \subset E$, E - espace de Banach et $\overline{X} = X$.

Théorème 7 *Soit $f : X \to X$ une application contractante, c'est à dire : il existe $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$, telle que*

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

pour tous $x, y \in X$. Alors il existe un point $a \in X$ unique (le point fixe) tel que $f(a) = a$. De plus si $x_0 \in X$

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = a, d(f^n(x_0), a) \leq k^n d(f(x_0), x_0).$$

Preuve.

$$d(f^n(x_0), f^{n+m}(x_0)) \leq d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) + \dots d(f^{n+m-1}(x_0), f^{n+m}(x_0))$$

$$\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{n+m-1})d(f(x_0), x_0) \leq \frac{k^n}{1-k} d(f(x_0), x_0).$$

Ceci montre que $(f^n(x_0))_n$ est une suite de Cauchy et par conséquent $f^n(x_0) \to a$. En passant à la limite $m \to \infty$ on obtient l'inégalité

$$d(f^n(x_0), a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(f(x_0), x_0).$$

5 Théorème Inversion Locale

5.1 Le cas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Définition 4 *On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un difféomorphisme local de classe C^k au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ lorsque*

- *il existe un ouvert U contenant a, tel que $V = f(U)$ est un ouvert*
- *$f : U \to V$ est une bijection (est par conséquent $f^{-1} : V \to U$ existe)*
- *$f \in C^k(U)$*
- *$f^{-1} \in C^k(V)$*

(on appelle difféomorphismes les C^1 difféomorphismes)

Théorème 8 *Si f est de classe C^1 au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $f'(0) \neq 0$, alors f est un difféomorphisme local au voisinage de a.*

Sans perte de généralité nous supposons que $a = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$.

Première preuve. Puisque f' est une fonction continue, il existe $\epsilon > 0$, tel que dans $]-\epsilon, \epsilon[$ la dérivée $f'x)$ soit strictement positive et par conséquent f soit strictement croissante. Il s'en suit que $f : [-\epsilon, \epsilon] \to [a, b]$, où $a = f(-\epsilon)$, $b = f(\epsilon)$, est une bijection. Soit $g(x) = f^{-1}(x)$, $x = f(g(x))$. On vérifie facilement que g est continue dans $[-\epsilon, \epsilon]$: dans le cas contraire il existe une suite $x_n \to x_0$, telle que (quitte à extraire une sous-suite) $g(x_n) \to y_0$, $y_0 \in [\epsilon, \epsilon]$, $y_0 \neq g(x_0)$. On en déduit que $x_n = f(g(x_n)) \to f(y_0)$ et donc $f(y_0) = x_0$, en contradiction avec $y_0 \neq g(x_0)$. Finalement

$$1 = \lim_{y \to 0} \frac{f(g(x+y)) - f(g(x))}{(x+y) - x} = \lim_{y \to 0} \frac{f(g(x+y)) - f(g(x))}{g(x+y) - g(x)} \frac{g(x+y) - g(x)}{(x+y) - x}$$

et puisque

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(g(x+y)) - f(g(x))}{g(x+y) - g(x)} = f'(g(x)) \neq 0$$

nous en déduisons que $g'(x)$ existe dans $]-\epsilon, \epsilon[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}.$$

La continuité de f', g implique $g = f^{-1} \in C^1(]a, b[)$. $\square$

La démonstration ci-dessus est simple, mais ne se généralise pas en dimension supérieure. Nous allons présenter une deuxième qui est facilement adaptable en dimension quelconque (même infinie).

Deuxième preuve. D'après la formule de Taylor $f(x) = f'(0)x - F(x)$ où $F(x) = o(|x|)$. Sans perte de généralité nous supposons que $f'(0) = 1$, $f(x) = x - F(x)$. Si la fonction inverse g de f existait, alors $g'(0) = 1$ et $g(x) = x + G(x)$, $G(x) = o(|x|)$ et $x = f(g(x)) = g(x) - F(g(x)) = x + G(x) - F(x + G(x))$. Nous en déduisons que

$$F(x + G(x)) = G(x). \tag{11}$$

Si nous pouvions résoudre l'équation "fonctionnelle" (11), le théorème serait démontré (on prouve aisément que G est de classe C^1). On remarque que G est le point fixe de l'application

$$\Phi : G \to F \circ (id + G) \tag{12}$$

Nous allons utiliser le Théorème du point fixe (voir la section précédente). Soit

$$E = \{G \in C^0([-\epsilon, \epsilon]) : |G(x)| \leq |x|\}.$$

E est un espace vectoriel normé avec la norme $||G|| = sup_{x\in[-\epsilon,\epsilon]}|G(x)|$. De plus il est complet (le théorème suivant a été prouvé au premier semestre : *toute suite uniformément convergente de fonctions continues converge vers une fonction continue*). Pour appliquer le Théorème du point fixe nous devons vérifier que Φ est contractante. Pour cela nous supposons que ϵ est si petit que

- la fonction F est définie dans $]-2\epsilon, 2\epsilon[$

- $|F(x)| < |x|/2$, $\forall x \in]-2\epsilon, 2\epsilon[$

Nous en déduisons que $\Phi(G(x)) = F(x+G(x))$ est bien définie $\forall x \in [-\epsilon, \epsilon]$ et

$$\|\Phi(G_1) - \Phi(G_2)\| = \sup_{x\in[-\epsilon,\epsilon]} |F(x + G_1(x)) - F(x + G_1(x))|$$

$$= \sup_{x\in[-\epsilon,\epsilon]} |F'(\xi(x)|.|G_1(x) - G_2(x)|, \xi(x) \in]x + G_1(x), x + G_1(x)[$$

Puisque $F'(0) = 0$ et F est continue en $x = 0$ nous pouvons supposer que $\epsilon > 0$ est si petit que $\sup_{x\in[-\epsilon,\epsilon]} F'(x) < c < 1$. Il s'en suit que

$$\|\Phi(G_1) - \Phi(G_2)\| \leq c \sup_{x\in[-\epsilon,\epsilon]} |G_1(x) - G_2(x)| = c\,\|G_1 - G_2\|$$

et donc Φ est une application contractante. D'après le Théorème du point fixe il existe une fonction unique $G \in E$ telle que $\Phi(G) = G$ et par conséquent $g(x) = x + G(x)$ est l'inverse à $f(x) = x - F(x)$: $f(g(x) = x$, $\forall x \in]-\epsilon, \epsilon[$. De plus g est dérivable, car

$$1 = \frac{f(g(x+\delta)) - f(g(x))}{x + \delta - x} = \frac{f(g(x+\delta)) - g(x)}{g(x+\delta) - g(x)} \frac{g(x+\delta) - g(x)}{x + \delta - x}$$

et

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{f(g(x+\delta)) - f(g(x))}{g(x+\delta) - g(x)} = f'(g(x).$$

Il s'en suit que

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{g(x+\delta) - g(x)}{(x + \delta - x)} = 1/f'(g(x),$$

c'est à dire g est dérivable, $g'(x) = 1/f'(g(x)$ et $g \in C^1(]-\epsilon, \epsilon[)$.

De la même manière on prouve que, étant donné une fonction g de classe C^1 au voisinage de 0, il existe une fonction h de de classe C^1 au voisinage de 0, telle que $g(h(x)) = x$. Nous avons

$$g(h(x)) = x \Rightarrow f(g(h(x))) = f(x) \Rightarrow h(x) = f(x).$$

Ainsi, $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ et g est la fonction inverse de f. En particulier f est bijective (localement) et donc g est unique.$\square$

5.2 Le cas général

Soit E, F deux espaces de Banach (e.v.n. complets).

Définition 5 *On dit qu'une application $f : E \to F$ est un difféomorphisme local de classe C^1 (ou tout simplement difféomorphisme) au voisinage de $a \in E$ lorsque*

- *il existe un ouvert U contenant a, tel que $V = f(U)$ est un ouvert*
- *$f : U \to V$ est une bijection (est par conséquent $f^{-1} : V \to U$ existe)*
- *$f \in C^1(U)$*
- *$f^{-1} \in C^1(V)$*

Il se peut que $U = E$, $V = f(U) = F$, alors on dit que f est un difféomorphisme global. Un difféomorphisme linéaire local L est nécessairement global. On dit que L est un isomorphisme. Enfin, un difféomorphisme (local ou global) de classe C^0 est dit homéomorhisme.

Théorème 9 (de l'application inverse) *Soit E, F deux espaces de Banach $L : E \to F$ une application continue linéaire bijective. Alors L est un isomorphisme.*

Démonstration. Puisque $c = \inf_{||x||=1} ||f(x)|| > 0$ existe (L est une bijection) alors $||f(x) \geq c||x||$ et $||f^{-1}(x)|| \leq ||x||/c$.$\square$

Voici un autre résultat garantissant l'existence d'une application inverse.

Théorème 10 *Soit $h : E \to E$ une application linéaire continue, $||h|| < 1$. Alors l'application linéaire $f = id - h$ est un isomorphisme, et*

$$(id - h)^{-1} = id + h + h^2 + \dots$$

Théorème 11 (d'inversion locale) *Soit $f : E \to F$ une application de classe C^1 au voisinage de $a \in E$. f est un difféomorphisme local au voisinage de a si et seulement si $Df(a)$ est un isomorphisme.*

Preuve. Si f est un difféomorphisme local, alors $Df(a)$, $D[f^{-1}](a)$ sont des applications linéaire continues et $Df(x) \circ D[f^{-1}](x) = id$. Ainsi, $Df(a)$ est un isomorphisme.

Supposons que $Df(a)$ est un difféomorphisme. Pour monter que f est un difféomorphisme local, nous allons généraliser la deuxième preuve ci-dessus . Puisque f est de classe C^1 au voisinage de a, nous avons

$$f(a+x) = f(a) + Df(a)(x) + o(\|x\|).$$

Sans perte de généralité nous supposons que $a = f(a) = 0$. La différentielle $Df(a)$ est un isomorphisme. En remplaçant $Df(a)(x)$ par x (changement de la variable) nous pouvons supposer aussi que

$$f(x) = x - F(x), \text{ où } F(x) = o(\|x\|), E = F.$$

Nous allons construire une application continue g au voisinage de $0 \in E$, telle que $f \circ g = id$. L'identité $f(g(x)) = g(x) + o(||g(x)||) \equiv x$ montre que $g(x) = x + o(||x||)$. On pose pour la suite

$$f(x) = x - F(x), F(x) = o(\|x\|), g(x) = x + G(x), G(x) = o(\|x\|).$$

Nous allons utiliser le Théorème du point fixe pour résoudre l'équation fonctionnelle (12)

$$f(g(x)) = x \Leftrightarrow F(x + G(x)) = G(x) \Leftrightarrow \Phi(G) = G$$

Soit

$$E = \{G \in C^0(\overline{B(0,\epsilon)}) : \|G(x)\| \leq \|x\|\}, \overline{B(0,\epsilon)} = \{x \in E : \|x\| \leq \epsilon\}.$$

E est un espace métrique avec induite par la norme $\|G\| = sup_{x \in \overline{B(0,\epsilon)}} \|G(x)\|$. De plus il est complet (à justifier). Pour appliquer le Théorème du point fixe nous devons vérifier que Φ est contractante. Pour cela nous supposons que ϵ est si petit que

- la fonction F est définie dans la boule ouverte $B(0, 2\epsilon)$
- $\|F(x)\| < \|x\|/2$, $\forall x \in]B(0, 2\epsilon)$

Nous en déduisons que $\Phi(G(x)) = F(x + G(x))$ est bien définie $\forall x \in \overline{B(0,\epsilon)}$ et

$$\begin{aligned}\|\Phi(G_1) - \Phi(G_2)\| &= \sup_{x\in\overline{B(0,\epsilon)}} |F(x + G_1(x)) - F(x + G_1(x))| \\ &\leq \sup_{\xi\in\overline{B(0,2\epsilon)}} \|DF(\xi)\| \, . \sup_{x\in\overline{B(0,\epsilon)}} \|G_1(x) - G_2(x)\|\end{aligned}$$

(nous venons d'utiliser le Théorème d'accroissements finis).

Puisque $DF(0) = 0$ et F est continue en $x = 0$ nous pouvons supposer que $\epsilon > 0$ est si petit que $\sup_{\xi\in\overline{B(0,\epsilon)}} \|DF(\xi)\| < c < 1$. Il s'en suit que

$$\|\Phi(G_1) - \Phi(G_2)\| \leq c \sup_{x\in\overline{B(0,\epsilon)}} \|G_1(x) - G_2(x)\| = c \, \|G_1 - G_2\|$$

et donc Φ est une application contractante. D'après le Théorème du point fixe il existe une fonction unique $G \in E$ telle que $\Phi(G) = G$ et par conséquent $f(g(x) = x, \forall x \in \overline{B(0,\epsilon)}$ où $g(x) = x + G(x)$.

Montrons que g est de classe C^1 sur la boule ouverte $B(0,\epsilon)$. D'abord, g est différentiable en 0 :

$$x = f(g(x)) = g(x) - F(g(x)) = x + G(x) + o(||x + G(x)||) = x + G(x) + o(||x||)$$

et donc $g(x) = x + o(||x||)$. De la même manière on prouve la différentiabilité de g en tout $a \in B(0,\epsilon)$. Il s'en suit que

$$Df(g(x)) \circ Dg(x) = id \text{ et } Dg(x) = [Df(g(x))]^{-1}.$$

Puisque l'application

$$L \to L^{-1} : Isom(E) \to Isom(E)$$

est même différentiable (Théorème 10), alors $[Df(g(x))]^{-1}$ dépend continûment de x et Dg est de classe C^1.

De la même manière on prouve que, étant donné une application g de classe C^1 au voisinage de 0, il existe une application h de de classe C^1 au voisinage de 0, telle que $g(h(x)) = x$. Nous avons

$$g(h(x)) = x \Rightarrow f(g(h(x))) = f(x) \Rightarrow h(x) = f(x).$$

Ainsi, $g(f(x)) = f(g(x)) = x$ et g est l'application inverse de f. $\square$

6 Théorème des fonctions implicites

Soient E_1, E_2, F des espaces vectoriels normés (espaces de Banach), et

$$f : E_1 \times E_2 \to F : (x, y) \mapsto f(x, y), x \in E_1, y \in E_2$$

une application de classe C^1 au voisinage de $(a, b) \in E_1 \times E_2$.

Théorème 12 *On suppose que f est de classe C^1 au voisinage de $(a, b) \in E_1 \times E_2$ et que la différentielle $D_y f(a, b) : E_2 \to F$ est un isomorphisme. Alors l'équation $f(x, y) = f(a, b)$ peut être résolue localement par rapport à la variable y au voisinage de (a, b) : il existe un voisinage ouvert U de a et un voisinage ouvert V de b, et une application $\varphi : U \to V$ de classe C^1, unique, telle que*

$$(x \in U, y \in V, f(x, y) = f(a, b)) \Leftrightarrow (x \in U, y = f(x))$$

Preuve. Comme dans la section précédente nous pouvons supposer que $a = b = 0$, $f(a, b) = 0$, $D_y f(0, 0) = id$, $F = E_2$. Soit Φ l'application auxiliaire

$$\begin{array}{rcl} \Phi : E_1 \times E_2 & \to & E_1 \times E_2 \\ (x, y) & \mapsto & (x, f(x, y)). \end{array}$$

L'application linéaire

$$D\Phi(0, 0)(h_1, h_2) = (h_1, D_x f(0, 0)(h_1) + D_y f(0, 0)(h_2))$$

est continue, inversible, et l'inverse est continue. Ainsi, $D\Phi(0, 0)$ est un isomorphisme et nous pouvons appliquer le Théorème des fonctions inverses. L'application inverse Φ^{-1} existe et si $(\xi, \eta) = (x, f(x, y))$, alors il existe une application φ de classe C^1, unique, telle que au voisinage de (ξ, η)

$$(x, y) = (\xi, \varphi(\xi, \eta)).$$

On en déduit que $y = \varphi(x, 0)$ est l'application unique ayant la propriété énoncée

$$f(x, \varphi(x, 0)) \equiv 0.$$