Licence Mathématiques Fondamentales. Année 2009-2010.
Calcul Différentiel. Devoir à la Maison. À rendre le 25/01/10

Problème : Différentielle de l'exponentielle d'endomorphisme.

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie. On munit $\mathscr{L}(E)$ d'une norme d'algèbre (i.e. $\| u \circ v \| \leq \| u \| \cdot \| v \|$ pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$, et $\| id \| = 1$).
On rappelle que $\mathscr{L}(E)$ est un espace vectoriel normé complet : toute série à valeurs dans $\mathscr{L}(E)$ normalement convergente est convergente.
En particulier, pour $u \in \mathscr{L}(E)$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{u^n}{n!}$ est normalement convergente, donc convergente, et on note $\exp(u)$ ou e^u l'endomorphisme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.

On se propose de calculer la différentielle de l'application $\exp : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{L}(E)$.

On admettra que si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors $\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v)$.
En particulier, quel que soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $\exp(u)$ est inversible, d'inverse $\exp(-u)$.

1. Préliminaires.

1.1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(E)$, $t \mapsto \exp(tu)$, est dérivable, et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = u \circ \varphi(t) = \varphi(t) \circ u$.

1.2. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que l'équation différentielle d'inconnue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(E)$:

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \circ u \qquad (\textit{resp. } \varphi'(t) = u \circ \varphi(t))$$

admet pour solutions les fonctions $\varphi(t) = u_0 \circ \exp(tu)$ (resp. $\varphi(t) = \exp(tu) \circ u_0$), où $u_0 \in \mathscr{L}(E)$ est quelconque.

1.3. Pour tout $u_0 \in GL(E)$, on note $Ad(u_0)$ l'automorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par $Ad(u_0)(u) = u_0 \circ u \circ u_0^{-1}$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$.
Par ailleurs, pour tout $u_0 \in \mathscr{L}(E)$, on note $ad(u_0)$ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$ défini par $ad(u_0)(u) = u_0 \circ u - u \circ u_0$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, on a l'égalité dans $GL(\mathscr{L}(E))$: $\exp(ad(u)) = Ad(\exp(u))$.
Indication : on établira une équation différentielle vérifiée par $\varphi(t) = Ad(\exp(tu))$.

2. Pour tout $f \in \mathscr{L}(F)$, où F est un espace vectoriel réel de dimension finie (par exemple $F = \mathscr{L}(E)$), notons symboliquement

$$\frac{Id - \exp(-f)}{f}$$

pour l'endomorphisme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n f^n}{(n+1)!}$. Nous allons établir que $\exp(-u)d(\exp)(u)$ est l'application linéaire

$$X \in \mathscr{L}(E) \mapsto \frac{Id - \exp(-ad(u))}{ad(u)}(X) \in \mathscr{L}(E).$$

2.1. Justifier que $\exp : \mathscr{L}(E) \to GL(E) \subset \mathscr{L}(E)$, est de classe $\mathscr{C}^1$ (on pourra utiliser un théorème de dérivation des séries de fonctions).

2.2. Montrer qu'au voisinage de 0, $\exp(h) = id + h + O(\| h \|^2)$, et donc que $d(exp)(0) = Id_{\mathscr{L}(E)}$.

2.3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour tous $t, \mu \in \mathbb{R}$, on a $\exp((t+\mu)u) = \exp(tu)\exp(\mu u)$.
En supposant t et μ fixés, calculer les différentielles en u des applications $u \mapsto \exp(t+\mu)u$ et $u \mapsto \exp(tu)\exp(\mu u)$, évaluées en $X \in \mathscr{L}(E)$.
On pose alors $\varphi(\alpha) = \alpha[d(\exp)(\alpha u)] \cdot (X)$, ce qui définit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(E)$.
Déduire du calcul précédent que, pour tous $t, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t+\mu) = \varphi(t)\exp(\mu u) + \exp(tu)\varphi(\mu)$$

puis que, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(\mu) = \varphi'(0)\exp(\mu u) + u\varphi(\mu) \qquad (\mathscr{E})$$

2.4. Justifier que l'on peut résoudre $(\mathscr{E})$ en introduisant une fonction dérivable $\lambda : \mathbb{R} \to \mathscr{L}(E)$ telle que $\varphi(t) = \exp(tu)\lambda(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda'(t) = \exp(-tad(u))(\varphi'(0))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis que

$$\lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}(-ad(u))^n \varphi'(0)$$

Que vaut $\varphi'(0)$?

2;5. Déduire de ce qui précède la formule annoncée pour $\exp(-u)d(\exp)(u)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le spectre complexe de $ad(u)$ pour que la différentielle en u de l'exponentielle soit inversible.