Calcul différentiel - Feuille 7

Intégrales triples, intégrales de surfaces et intégrales curvilignes

Exercice 1. Calculez le volume du tonneau $T = \{x^2+y^2 \leq \phi(z)^2, -h \leq z \leq h\}$, de hauteur $2h$ et de petit et grand rayon R_1 et R_2, où $\phi(z) = \frac{R_1-R_2}{h^2} z^2 + R_2$.

Exercice 2. (examen juin 2001)
Soient $0 < \rho < R$. On considère la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ paramétrée de la façon suivante : $x = (R + \rho\cos\phi)\cos\theta$, $y = (R + \rho\cos\phi)\sin\theta$, $z = \rho\sin\phi$, avec $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$.
a) Donnez l'expression du vecteur normal $\vec{N}(\phi, \theta)$ en un point quelconque de S.
b) Calculez l'aire de S.
c) Déterminez l'ensemble des points de S en lesquels le plan d'équation $z = \rho$ est tangent.

Exercice 3. Soit la surface S définie par $z = x^2 + y^2 \leq 2$
a) Représentez S.
b) Calculez le vecteur normal à S.
c) Calculez l'aire A de S.
d) Calculez le flux ϕ du vecteur $(0, 0, 1)$ à travers S.
e) Calculez $I = \iint_S (x + y + z)\, dS$ et $J = \iint_S (x + y + z)\, dx\, dy$.
f) Si S représente un récipient, quelle est la contenance de V ?
g) Calculez $K = \iiint_{\mathcal{V}} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$ où $\mathcal{V}$ est le volume délimité par S et le plan d'équation $z = 2$.

Exercice 4. (examen juin 2003)
On considère la surface Σ paramétrée par $F(t, \theta) = (R(1-\cos t)\cos\theta, R(1-\cos t)\sin\theta, R(t-\sin t))$, où R est une constante > 0 et t et θ sont des paramètres qui varient entre 0 et 2π.
a) Déterminer l'ensemble des points réguliers de Σ.
b) En tout point régulier de Σ, donner l'expression du vecteur normal et l'équation du plan tangent.
c) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface Σ (indication : on a $4\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - sin3\alpha$).

Exercice 5. Calculez $\iint_S y\, z\, dy\, dz + x\, z\, dx\, dz + x\, y\, dx\, dy$ où S est la face extérieure du tétraèdre délimité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 3$.

Exercice 6. Calculer le périmètre de l'astroïde, courbe paramétrée par $x(t) = 4a\cos^3 t$ et $y(t) = 4a\sin^3 t$, avec t allant de 0 à 2π.

Exercice 7. (examen juin 2001)
C^+ désignant le cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$ parcouru dans le sens positif, calculez l'intégrale curviligne $I = \int_{C^+} x^3\, dy - y^3\, dx$.

Exercice 8. a) Soit D un domaine fermé par un arc γ. En utilisant la formule de Green-Riemann, montrer que l'aire de D vaut $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} x\, dy - y\, dx$.
b) Soit l'arc AB définit en coordonnées polaires par $\alpha \leq \theta \leq \beta$ et $r = r(\theta)$ qui est une fonction donnée. Soit D le domaine compris entre le segment OA, l'arc AB et le segment BO. En utilisant la question précédente, montrer que $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r(\theta)^2\, d\theta$.