Université Paul Sabatier
UFR MIG - Département de Mathématiques

Mai 2005

CALCUL DIFFÉRENTIEL - Feuille 6

UE08, Licence 2ème Année

Intégrales multiples

Exercice 1- Calculer les intégrales doubles suivantes: $I = \int\int_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\, dx\, dy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ \ x^2 + y^2 < r^2\}$, avec $a, b, r > 0$. $K = \int\int_\Delta \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, où $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 - 2y > 0,\ x^2 + y^2 < 1,\ x > 0, y > 0\}$.

Exercice 2-
Pour $r > 0$, on pose $I_r = \int\int_{\Delta_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$, $J_r = \int\int_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}$, où $\Delta_r =]0, r[\times]0, r[$ et $D_r = \{(x,y) |\ x^2 + y^2 < r^2,\ x > 0,\ y > 0\}$.

1. À l'aide des coordonnées polaires, calculer J_r, puis $\lim_{r \to +\infty} J_r$.
2. Comparer I_r, J_r et $J_{r\sqrt{2}}$.
3. En déduire l'existence et les valeurs des limites suivantes: $\lim_{r \to +\infty} I_r$, $\lim_{r \to +\infty} \int_0^r e^{-x^2}\, dx$.

Exercice 3- Soient $0 < a < b$ et $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0,\ y > 0,\ a < xy < b,\ x < y < \sqrt{x^2+1}\}$.

1. Représenter Δ et montrer que Δ est un ouvert borné.
2. À l'aide du changement de variable ($X = y^2 - x^2$, $Y = xy$), calculer l'intégrale $J = \int\int_\Delta 2(y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

Exercice 4-(Examen juin 2001)

1. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. On considère l'application $(x,y) \in \Omega \mapsto F(x,y) = (u(x,y), v(x,y)) \in \mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y) = \frac{x^2}{2y}$ et $v(x,y) = \frac{y^2}{2x}$. Montrer que F est un difféomorphisme de Ω dans lui-même et calculer sa matrice jacobienne.
2. On considère les domaines $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \geq \sqrt{x}, x \geq \sqrt{y}\}$, $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leq \sqrt{2x}, x \leq \sqrt{4y}\}$ et $D = D_1 \cap D_2$. Représenter D et montrer brièvement que $D \in \Omega$.
3. A l'aide du changement de variables du 1), calculer l'aire de D.