Université Paul Sabatier
UFR MIG - Département de Mathématiques Mars 2005

CALCUL DIFFÉRENTIEL - Feuille 5
UE08, Licence 2ème Année

Courbes planes :

Exercice 1 : Soit $a > b > 0$ et $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

1. Montrer que la courbe E peut être paramétrée par
$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta, \\ y(\theta) = b\sin\theta \end{cases}$$
pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et dessiner E dans le plan.
2. Calculer le vecteur vitesse en un point $M = (x,y) \in E$ relatif à la paramétrisation précédente. Calculer le vecteur unitaire normal à E sortant en un point $M = (x,y) \in E$.
3. On pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = c/a =$, $h = a^2/c$, $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$, D la droite $x = h$ et D' la droite $x = -h$. Montrer que
$$M = (x,y) \in E \iff MF = e\,\mathrm{dist}(M, D) \iff MF' = e\,\mathrm{dist}(M, D').$$
4. En déduire que $M = (x,y) \in E \iff MF + MF' = 2a$.
5. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in E$ avec $y_0 \neq 0$ et P le point d'intersection de D et de la perpendiculaire à (M_0F) passant par F. Montrer que (PM_0) est tangente à E.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$. Montrer que l'équation $f(x,y) = f(1,1)$ définit, au voisinage du point $(1,1)$, une courbe dont on précisera la tangente en $(1,1)$.

Surfaces dans $\mathbb{R}^3$:

Exercice 3 : Soit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2+y^2) = x^2 - y^2 + 1\}$.

1. Montrer que S n'a pas de point singulier.
2. Donner l'expression du vecteur normal et l'équation du plan tangent en tout point de S.

Exercice 4 : Soit $D = [0, 2\pi]^2$ et S' la surface paramétrée sur D par
$$F(t,\theta) = ((1-\cos t)\cos\theta, (1-\cos t)\sin\theta, t - \sin t).$$

1. Déterminer les points singuliers de S'.
2. Donner l'expression d'un vecteur normal et l'équation du plan tangent en tout point régulier.

Exercice 5 : Soit l'ellipsoïde $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

1. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{E}$ qui coupent les axes en trois points A, B, C tels que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.
2. A quoi ressemble l'intersection de $\mathcal{E}$ avec un plan qui passe par l'origine ?