UNIVERSITE PAUL SABATIER

Calcul différentiel et intégral

Examen du 31 mai 2005

Tous documents interdits. Durée 2h.

Exercice 1 (4 points)

Soient $a > 0$ et $b > 0$ donnés. On désigne par E^+ l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

parcourue dans le sens positif. Calculer l'intégrale curviligne:

$$I = \int_{E^+} b^2x^3dy - a^2y^3dx$$

1) Directement.
2) En utilisant la formule de Green-Riemann. (Formulaire: $cos^4t+sin^4t = 1-\frac{1}{4}(1-cos4t)$.)

Exercice 2 (8 points)

$t > 0$ étant fixé, on considère l'hyperboloïde de révolution à une nappe, (H), paramétré par

$$F(\theta, \varphi) = (\sqrt{3}\ ch\theta\ cos\varphi, \sqrt{3}\ ch\theta\ sin\varphi, sh\theta),$$

avec $0 \leq \theta \leq t$ et $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.
1) Donner l'expression du vecteur normal à (H).
2) Ecrire l'équation du plan P tangent à (H) passant par le point M de coordonnées $(\sqrt{3}\ ch\theta\ cos\varphi, \sqrt{3}\ ch\theta\ sin\varphi, sh\theta)$ et vérifier qu'il ne passe jamais par l'origine.
3) Calculer en fonction de sht l'aire $\mathcal{A}$ de (H).
(Formulaire: $chu = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$; $shu = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$; $ch^2u = 1 + sh^2u = \frac{1}{2}(ch2u + 1)$; $sh2u = 2chu\ shu$).
4) Calculer le volume du domaine compris entre (H), le plan d'équation $z = 0$ et le plan d'équation $z = sht$.

Exercice 3 (10 points)

On considère l'application φ de $I\!R^3$ dans $I\!R^3$ définie pour $x \neq 0$ par

$$(u, v, w) = \varphi(x, y, z) = (x + y, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}).$$

1) Soit $\mathcal{O} = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : x > 0, x + y > 0\}$. Montrer brièvement que $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ et calculer sa matrice Jacobienne.
2) $D\varphi(x, y, z)$ désignant la différentielle de φ en $(x, y, z) \in \mathcal{O}$, donner l'expression de $D\varphi(x, y, z)(h, k, l)$.

3) On considère l'ouvert $\Omega = \{(u, v, w) \in I\!R^3 : u > 0, 1 + v > 0\}$. Montrer que φ est bijective de $\mathcal{O}$ sur Ω en calculant son application réciproque. En déduire que φ est un difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur Ω.
4) On considère $D = \{(x, y, z) \in I\!R^3 : 0 < x < 1, 0 < y < min(x, 1 - x), 0 < z < x\}$.
Montrer que $\varphi(D) =]0, 1[^3$.(NB: On pourra le cas échéant admettre le résultat et faire la question suivante).
5) A l'aide du difféomorphisme précédent, calculer l'intégrale

$$\int\int\int_D \frac{x + y}{x(x^2 + z^2)} dxdydz.$$