Université Paul Sabatier
UFR MIG - Département de Mathématiques Mars 2005

CALCUL DIFFÉRENTIEL - Feuille 4
UE08, Licence 2ème Année

Fonctions composées :

Exercice 1 : Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

1. Soit $g(x) = f(x, u(x), x)$. Calculer g'.
2. Soit $h(x, y) = f(u(x), v(x, y), x)$. Calculer $\partial_x h$ et $\partial_y h$.
3. Soit $j(x) = f(u(x), x, v(x, x))$. Calculer j'.

Théorème d'inversion locale :

Exercice 2 : Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^3 + 3\,x\,e^y, y - x^2)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis que c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : Soit l'application $f : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. En quels points peut-on appliquer le théorème d'inversion locale ? Utiliser ce théorème pour calculer facilement $\partial_x\theta$ et $\partial_y\theta$.

Théorème des fonctions implicites :

Exercice 4 : On pose $f(x, y) = x^4 + x^2 + y^4 + 2y^2 - 5$. Trouver une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I contenant 1, définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ et vérifiant $\varphi(1) = 1$.
Préciser l'intervalle I et dire si la fonction φ est unique.

Exercice 5 : Soient $I =]-\infty, 1[$ et $U = I \times \mathbb{R}$. On définit

$$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^3 + y^3 - 1 \end{array}$$

a) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que, pour tout $(x_0, y_0) \in U$ vérifiant $f(x_0, y_0) = 0$, il existe une fonction $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$ définie implicitement au voisinage de ce point par la relation $f(x, y) = 0$.
b) Montrer en la calculant qu'il existe une unique fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie implicitement par $f(x, y) = 0$. Vérifier que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ et satisfait l'équation

$$y^2y''' + 6yy'y'' + 2(y')^3 + 2 = 0$$

Exercice 6 : Soit $f(x, y, z) = z^4 - x^4 - 2z^2 + x^2 - y^2 - 1$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $f(x, y, z) = 0$ a une unique solution $z = \psi(x, y) > 0$.
Montrer que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.
Calculer les dérivées partielles de cette fonction en $(2, 2)$.