Université Paul Sabatier
UFR MIG - Département de Mathématiques

Février 2005

CALCUL DIFFÉRENTIEL - Feuille 3
UE08, Licence 2ème Année

Différentielles :

Exercice 1 : On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme Euclidienne que l'on note $\|\cdot\|_2$. On considère la fonction $f\,:\,\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 - y^2$.

1. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$, calculez $f(x+h, y+k) - f(x,y)$.
2. On définit pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, l'application (dépendant de x et y)

$$\begin{array}{rccl} L_{x,y}\,: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (h,k) & \mapsto & \begin{pmatrix} 2\,x \\ -2\,y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 2\,x\,h - 2\,y\,k. \end{array}$$

   Montrez que $L_{x,y}$ est continue.
3. Montrez que $L_{x,y} = Df(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Calculer la différentielle des fonctions suivantes

$$\begin{array}{rccl} f\,: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & e^x \sin(y), \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g\,: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x^2 e^{yz} h(y, zx), \end{array}$$

où h est une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : La troisième loi de Kepler donne la relation

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM},$$

entre la masse M du soleil, la période T de révolution d'une planète autour du soleil, a la longueur du petit axe de l'orbite, et G la constante de gravitation. En supposant qu'on connaît des mesures de a, T et G à Δa, ΔT et ΔG près, on veut en déduire la masse du soleil, ainsi que l'incertitude liée à celles sur a, T et G :

1. Exprimez M en fonction des autres variables.
2. Calculez $M(a + \Delta a, T + \Delta T, G + \Delta G)$ en fonction de $M(a, T, G)$, de $\Delta a, \Delta T, \Delta G$ et d'un reste.
3. Quels termes peut-on négliger dans la formule précédente si les incertitudes sont suffisamment petites ? Déduisez en une estimation de l'incertitude ΔM sur la masse du soleil (i.e majorer $\Delta M = |M(a + \Delta a, T + \Delta T, G + \Delta G) - M(a, T, G)|$.

Changement de variables :

Exercice 4 : Déterminer toutes les fonctions de $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivante :

$$\partial_x f - \partial_y f = 0,$$

en utilisant le changement de variables $u(x,y) = x + y$, $v(x,y) = x - y$.

Exercice 5 : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. On veut déterminer les fonctions de $C^1(D;\mathbb{R})$ telles que

$$x\partial_x f + y\partial_y f = 0.$$

1. Vérifier que $\phi(x,y) = \frac{y}{x}$ est solution.
2. Soit $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \phi$ est solution.
3. Soit f une solution, montrer que $F(u,v) = f(u,uv)$ ne dépend que de v.
4. Donner toutes les solutions.

Formule de Taylor - Calculs d'extrema :

Exercice 6 : Ecrivez le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $(1,2)$ de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + x\,y^2 + y^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7 : Déterminer si les matrice suivantes peuvent être des matrices Hessiennes. Si oui, trouver toutes les fonctions de $C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ qui ont ces matrices comme matrices Hessiennes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ x-y & y^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 : Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x^3, \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2). \end{array}$$

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 - 3\,x + x\,y^2$. Déterminez les points critiques de f et leur nature (minimum local ? maximum local ? point selle ?...)