Université Paul Sabatier
UFR MIG - Département de Mathématiques

Février 2005

CALCUL DIFFÉRENTIEL - Feuille 2

UE08, Licence 2ème Année

I. Continuité:

1. Pour la fonction suivante, trouver le domaine de définition Ω, montrer que c'est un ouvert, et étudier la continuité de f sur cet ouvert.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x+y}{x-y} \end{array}$$

2. La fonction suivante est-elle continue en $(0,0)$?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; & (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

3. Examiner la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} & ; & x^2 \neq y^2 \\ \frac{3}{2}x & ; & x^2 = y^2 \end{array} \right. \end{array}$$

II. Dérivées partielles, classes de fonctions, théorème de Schwarz:

1. Pour la fonction suivante, étudier sa continuité dans $\mathbb{R}^3$ et calculer ses dérivées premières. Cette fonction appartient-elle à $\mathcal{C}^1$?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & ; & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; & (x,y,z) = (0,0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

2. Prouver que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais qu'elle admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{(x+y)^2}{x-y} & ; & x \neq y \\ 0 & ; & x = y \end{array} \right. \end{array}$$

3. Pour la fonction suivante, déterminer son domaine de définition, calculer ses dérivées partielles et dire si elle est $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{x^2-y^2} \end{array}$$

4. Pour la fonction suivante, déterminer son domaine de définition, calculer ses dérivées partiellles du premier et du second ordre, puis trouver un ouvert dans lequel elle est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \sqrt{1-x^2-y^2} \end{array}$$

5. Montrer que $\partial^2_{xy}f(0,0)$ et $\partial^2_{yx}f(0,0)$ existent et sont distinctes. Que conclure ?

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array}$$

6. Trouver une condition suffisante et nécessaire sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que f soit solution de l'équation de Laplace:

$$\partial^2_{xx}f + \partial^2_{yy}f + \partial^2_{zz}f = 0$$

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & e^{ax+by}sin(cz) \end{array}$$

III. Dérivées partielles de fonctions composées:

1. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Exprimer à l'aide de la dérivée de F, les dérivées partielles de la fonction f. f est-elle $\mathcal{C}^1$?

$$f(x,y) = F(\frac{2x+3y}{1+x^2+y^2})$$

2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.On pose, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.Soit: $F(x,y,z) = \varphi(r)$. Montrer que, dans l'ouvert $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$:

$$(\frac{d\varphi}{dr})^2 = (\partial_x F)^2 + (\partial_y F)^2 + (\partial_z F)^2$$

3. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2(U)$ tq:

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{et} \quad \partial_y u = -\partial_x v$$

Montrer que si f désigne u ou v, on a:

$$\partial^2_{xx}f + \partial^2_{yy}f = 0$$

Soient $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $u(x,y) = Re(z^3)$ et $v(x,y) = Im(z^3)$. Montrer que u, v vérifient les hypothèses ci-dessus.

4. Soient $u, v, f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. On pose $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$. Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction F.