UNIVERSITE PAUL SABATIER
Calcul Différentiel et Intégral
Examen de Septembre 2005, UE08 : Licence 2ème Année
Corrigé abrégé.

Exercice I (8 points) Soit $f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Développer la fonction f en série de Taylor à l'ordre quatre au voisinage de $(0,0)$.

   $f(x,y) = -x + x^3 + xy^2$.

2. Calculer $\nabla f(x,y)$ et déterminer l'ensemble des points où ce gradient s'annule.

   $\nabla f(x,y) = (f_x(0,0), f_y(x,y)) = (3x^2 + y^2 - 1, 2xy)$. *Le gradient s'annule si et seulement si* $(x,y) = (0, \pm 1)$ *ou* $(x,y) = (\pm 1/\sqrt{3}, 0)$.

3. $Df(x,y)$ désignant la différentielle de f en (x,y), donner l'expression de $Df(x,y)(h,k)$.

   $Df(x,y)(h,k) = (3x^2 + y^2 - 1)h + 2xyk$.

4. Calculer la matrice Hessienne $H_f(x,y)$.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

5. Montrer que f ne présente pas un extremum en $(x,y) = (0, \pm 1)$.

   Puisque $\det H_f(0, \pm 1) = -4 < 0$, *le point* $(0, \pm 1)$ *est un point selle et* f *ne présente pas un extremum. Autre méthode: si* f *présente un extremum en* $(x,y) = (0, \pm 1)$ *alors la fonction* $g(x) = f(x, \pm 1) = x^3$ *présente un extremum en* $x = 0$, *ce qui est erroné.*

6. Déterminer les maxima et minima locaux de f.

   Puisque $H_f(1/\sqrt{3}, 0)$ *est définie positive,* f *présente un minimum local en* $(1/\sqrt{3}, 0)$. *De même,* f *présente un maximum local en* $(-1/\sqrt{3}, 0)$, *car* $H_f(-1/\sqrt{3}, 0)$ *est définie negative.*

7. Calculer la valeur maximale de f dans le disque $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   Le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *est borné et fermé, il existe donc un point* $(x_0, y_0) \in D$, *tel que* $f(x_0, y_0) = sup_{(x,y) \in D} f(x,y)$. *Si* $x_0^2 + y_0^2 = 1$, *alors* $f(x_0, y_0) = 0$, *mais si* $x_0^2 + y_0^2 < 1$, *nécessairement* (x_0, y_0) *est un maximum local pour* f *et donc* $(x_0, y_0) = (-1/\sqrt{3}, 0)$. *Puisque* $f(-1/\sqrt{3}, 0) = 2/3\sqrt{3} > 0$ *alors la valeur maximale de* f *dans le disque* D *est égale à* $2/3\sqrt{3}$.

Exercice II (6 points) Le but de cet exercice est de démontrer l'identité

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \qquad (1)$$

On pose

$D_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}, C_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R, |y| \leq R\}.$

1. En utilisant des coordonnées polaires, calculer l'intégrale double $J(R) = \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$. En déduire que $\lim_{R\to\infty} J(R) = \pi$.

   En coordonnées polaires $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, nous avons $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ et

   $$J(R) = \int_0^{2\pi} (\int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho) d\varphi = -2\pi \frac{e^{-\rho^2}}{2}|_0^R = \pi - \pi e^{-R^2} \overset{R\to\infty}{\to} \pi.$$

2. Montrer que

   $$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = (\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx)^2.$$

   $$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint_{C_R} e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy = \int_0^R (\int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dx) dy$$

   $$= \int_0^R e^{-y^2} (\int_0^R e^{-x^2} dx) dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = (\int_0^R e^{-x^2} dx)^2.$$

3. Monter que $D_R \subset C_R \subset D_{\sqrt{2}R}$. En déduire que

   $$\lim_{R\to\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{R\to\infty} \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx)^2.$$

Les inclusions $D_R \subset C_R \subset D_{\sqrt{2}R}$ impliquent

$$\iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

Puisque

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{R\to\infty} \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi$$

il s'ensuit (par le "théorème des gendarmes") que

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \pi$$

D'après question 2. de l'exercice II

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2}dxdy = \lim_{R\to\infty}(\int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx)^2 = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)^2$$

et par conséquent

$$(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx)^2 = \pi.$$

Exercice III (6 points) Soit S_R, $R > 0$, la surface définie par

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq R\}.$$

1. Calculer l'air de S_R

   Si l'on pose $r = (x, y, (x^2+y^2)/2)$, nous avons pour l'air $\mathcal{A}_R$ de S_R

   $$\mathcal{A}_R = \iint_{\{x^2+y^2\leq 2R\}} ||r_x \wedge r_y||dxdy$$

   où $r_x = (1, 0, x), r_y = (0, 1, y)$, $r_x \wedge r_y = (-x, y, 1)$, $||r_x \wedge r_y|| = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$. En coordonnées polaires $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi$, nous avons $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ et

   $$\mathcal{A}_R = \iint_{\{x^2+y^2\leq 2R\}} \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy$$

   $$= \int_0^{2\pi}(\int_0^{\sqrt{2R}} \sqrt{1+\rho^2}\rho d\rho d\varphi$$

   $$= 2\pi(1 + \rho^2)^{3/2}/3|_0^{\sqrt{2R}} = \frac{2\pi}{3}((1 + 2R)^{3/2} - 1).$$

2. Si S_R représente un récipient V_R, quel est la contenance de V_R ?

   Le volume de V_R est égal à

   $$\iiint_{V_R} dxdydz = \int_0^R(\iint_{x^2+y^2\leq 2z} dxdy)dz = \int_0^R \pi 2zdz = \pi R^2.$$