UNIVERSITE PAUL SABATIER
Calcul Différentiel et Intégral
Examen de Septembre 2005, UE08 : Licence 2ème Année
Tous documents interdits. Durée 2h.

Exercice I (8 points) Soit $f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 1)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Développer la fonction f en série de Taylor à l'ordre quatre au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer $\nabla f(x,y)$ et déterminer l'ensemble des points où ce gradient s'annule.
3. $Df(x,y)$ désignant la différentielle de f en (x,y), donner l'expression de $Df(x,y)(h,k)$.
4. Calculer la matrice Hessienne $H_f(x,y)$.
5. Montrer que f ne présente pas un extremum en $(x,y) = (0, \pm 1)$.
6. Déterminer les maxima et minima locaux de f.
7. Calculer la valeur maximale de f dans le disque $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice II (6 points) Le but de cet exercice est de démontrer l'identité

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \qquad (1)$$

On pose

$D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}, C_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R, |y| \leq R\}$.

1. En utilisant des coordonnées polaires, calculer l'intégrale double $J(R) = \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy$. En déduire que $\lim_{R\to\infty} J(R) = \pi$.
2. Montrer que
$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = (\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx)^2.$$
3. Monter que $D_R \subset C_R \subset D_{\sqrt{2}R}$. En déduire que
$$\lim_{R\to\infty} \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \lim_{R\to\infty} \iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = (\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx)^2.$$

Exercice III (6 points) Soit S_R, $R > 0$, la surface définie par

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq R\}.$$

1. Calculer l'air de S_R
2. Si S_R représente un récipient V_R, quel est la contenance de V_R ?