UNIVERSITE PAUL SABATIER
Calcul Différentiel et Intégral
Examen de Septembre 2004, UE08 : Licence 2ème Année
Tous documents interdits. Durée 2h.

1. Soit $f(x,y) = xy(1-x-y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) Développer la fonction f en série de Taylor à l'ordre quatre au voisinage de $(0,0)$.
   (b) Est-ce que f admet un maximum local strict en
      - $(0,0)$
      - $(1/3, 1/3)$
      - $(1,1)$? Justifiez les réponses.

   (c) Calculer $sup\{|f(x,y)| : (x,y) \in \Omega\}$ où
   $$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1-x-y \geq 0\}. \tag{1}$$

2. Calculer les intégrales $\iint_\Omega dxdy$, $\iint_\Omega xdxdy$, $\iint_\Omega ydxdy$. En déduire que
$$\left(\frac{\iint_\Omega xdxdy}{\iint_\Omega dxdy}, \frac{\iint_\Omega ydxdy}{\iint_\Omega dxdy}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$
(le "centre de masse" du triangle Ω).

3. Calculer l'aire du domaine compact délimité par

   l'astroïde
$$x = \cos^3(t), y = sin^3(t), 0 \leq t \leq 2\pi.$$
Indication: utiliser la formule de Green - Riemann.

4. Vérifier que l 'application $(x,y) \to (u,v)$, $u = e^x - e^y, v = \sin(x+y)$ est un difféomorphisme local au voisinage de $(0,0)$. Calculer
$$\frac{\partial y}{\partial u}(0,0), \frac{\partial y}{\partial v}(0,0).$$