UNIVERSITE PAUL SABATIER

Calcul différentiel et intégral

Examen de juin 2004

Tous documents interdits. Durée 2h.

Exercice 1

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $f(x,y) = x^2 + y^4$.
1) Calculer $\nabla f(x,y)$ et $H_f(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
2) En utilisant la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre, déterminer le point (x_0, y_0) en lequel f est susceptible d'avoir un extremum..
3) Montrer que f admet un minimum strict en (x_0, y_0).
4) $H_f(x_0, y_0)$ est-elle définie positive? Que montre cet exemple?.

Exercice 2

Dans l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ on considère la fonction u de Ω dans $\mathbb{R}$ définie par: $u(x,y,z) = f(r(x,y,z))$ où $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, et où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
1) Vérifier rapidement que $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.
2) En déduire que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.
3) On note $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. Exprimer Δu en fonction de r, $f'(r)$ et $f''(r)$.
4) On prend $f(r) = \frac{1}{r}$. Vérifier que $\Delta u = 0$ dans Ω.

Exercice 3

Soient $a \geq 0$ et $R > 0$ donnés. Pour $0 < z < 1$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$, on définit la surface Σ par

$$F(z,\theta) = \begin{pmatrix} zRcos\theta + za \\ zRsin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

1) Calculer le vecteur normal en tout point de Σ où cela est possible.
2)On suppose $a = 0$. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de Σ.

Exercice 4

On considère l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x+y < 1 \text{ et } 0 < x-y < 1\}.$$

Soit φ l'application de Ω dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$(x,y) \mapsto (u,v) = \varphi(x,y) := (e^{x+y}, e^{x-y}).$$

1) Montrer que φ est un difféomorphisme de Ω sur l'ouvert $\mathcal{O} =]1,e[\times]1,e[$ de $\mathbb{R}^2$.
2) $D\varphi(x,y)$ désignant la différentielle de φ en $(x,y) \in \Omega$, donner l'expression de $D\varphi(x,y)(h,k)$ pour $|h|$ et $|k|$ assez petits.
3) A l'aide du difféomorphisme précédent, calculer l'intégrale

$$\int\int_{\mathcal{O}} \frac{Logu - Logv}{uv} dudv.$$