UNIVERSITE PAUL SABATIER

Calcul différentiel et intégral

Partiel du 24 avril 2004

Tous documents interdits.

Durée 2h.

Exercice 1

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par: $f(x,y,z) = (xyz, x^2+y^2+z^2)$, et l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par: $g(u,v) = (v, u+v, u^2)$.
Calculer les matrices Jacobiennes J_f,J_g et $J_{g\circ f}$. On calculera $J_{g\circ f}$ de deux manières
1+1+2+2 différentes.

Exercice 2

α désignant un paramètre réel vérifiant $0 < \alpha \leq 1$, on considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = |xy|^\alpha.$$

1 1) Montrer que f est continue en $(0,0)$.
1 2) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3 3) On suppose $\alpha > \frac{1}{2}$. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et calculer sa différentielle.
3 4) On suppose $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3

Dans cet exercice, f désigne une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$.
1,5 1) On considère l'application u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$u(s,t) = (\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2})$$

et on pose $g = f \circ u$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial s}$ et $\frac{\partial g}{\partial t}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
1,5 2) On cherche l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation

$$(E) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Montrer que s'il existe une application h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, h de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f(x,y) = h(x+y)$, f est solution de (E).
3 3) Réciproquement, montrer à l'aide de la première question que si f est solution de (E), il existe h de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f(x,y) = h(x+y)$.