UNIVERSITE PAUL SABATIER

Calcul différentiel et intégral

Partiel du 29 mars 2005

Tous documents interdits.

Durée 2h.

Exercice 1 (4pts)

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par: $f(x,y,z) = (xy, yz)$,
et l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par: $g(u,v) = (v^2, uv, u^2)$.
Calculer les matrices Jacobiennes J_f,J_g et $J_{g \circ f}$. On calculera $J_{g \circ f}$ de deux manières différentes.

$f_{xx} = 12(x-y)^2 - 2x$

$f_{xy} = -12(x-y)^2 + 4$

Exercice 2 (6pts)

On considère la fonction

$$f(x,y) = (x-y)^4 - 2(x-y)^2 + (x+y)^2.$$

1) Calculer $\nabla f(x,y)$ et déterminer l'ensemble des points où ce gradient s'annule.
2) Calculer la matrice Hessienne $H_f(x,y)$ et déterminer les minima locaux de f.
3) Montrer que f admet également un point-selle.

Exercice 3 (10pts)

On considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \frac{(x^2y^2)^m}{x^2+y^2} \quad \text{pour} \quad (x,y) \neq (0,0),$$

$$f(0,0) = 0,$$

où $m > 0$ est un paramètre réel.

1 - Montrer qu'il existe $m_0 \in \mathbb{R}$ tel que f est continue en $(0,0)$ pour $m > m_0$ et discontinue pour $m \leq m_0$. Déterminer m_0 et prouver les résultats énoncés.

2 - Montrer qu'il existe $m_1 \in \mathbb{R}$ tel que f est différentiable en $(0,0)$ pour $m > m_1$ et non différentiable pour $m \leq m_1$. Déterminer m_1 et prouver les résultats énoncés.

3 - Montrer qu'il existe $m_2 \in \mathbb{R}$ tel que f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $(0,0)$ pour $m > m_2$ et non $\mathcal{C}^1$ pour $m \leq m_2$. Déterminer m_2 et prouver les résultats énoncés.