UNIVERSITE PAUL SABATIER

Calcul différentiel et intégral

Partiel de mars 2003

Tous documents interdits.

Durée 2h.

Exercice 1

On considère l'application f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par: $f(x,y,z) = (yz, xy)$,
et l'application g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par: $g(u,v) = (v, u^2+v^2, u)$.
Calculer les matrices Jacobiennes J_f,J_g et $J_{g\,o\,f}$. On calculera $J_{g\,o\,f}$ de deux manières différentes.

Exercice 2

m étant un paramètre réel, on considère l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \frac{(x^2y^2)^{m/2} Sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2+y^2} \quad \text{pour} \quad x \neq 0,$$

$$f(x,y) = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

1) Montrer que f est continue en $(0,0)$ pour $m > 1$ et discontinue pour $m = 1$.
2) a) Montrer que pour $m \geq 1$, f admet en $(0,0)$ des dérivées partielles que l'on calculera.
   b) Montrer que pour $m > 3/2$, f est différentiable en $(0,0)$ et calculer sa différentielle.
   c) Montrer que pour $m = 3/2$, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
3) On suppose $m > 1$. Calculer

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

en tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. $(0,0)$ ayant déjà été considéré, on distinguera les 3 cas suivants:
   a) $x_0 \neq 0$, $y_0 = 0$.
   b) $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$.
   c) $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$.
4) a) Montrer que pour $m > 2$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$ et discontinue pour $m = 2$.
   b)Montrer que pour $m > 3/2$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.