Calcul Différentiel et Intégral

Corrigé de l'examen de Juin 2005

Exercice 1

1) On pose $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $dx = -a\sin t\,dt$, $dy = b\cos t$

$$I = \int_0^{2\pi}\left[b^2 a^3\cos^3 t\,(b\cos t) - a^2 b^3\sin^3 t\,(-a\sin t)\right]dt = a^3b^3\int_0^{2\pi}(\cos^4 t + \sin^4 t)\,dt$$

Or $\cos^4 t + \sin^4 t = (\sin^2 t + \cos^2 t)^2 - 2\sin^2 t\cos^2 t = 1 - \frac{(\sin 2t)^2}{2} = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4t)$

$$I = a^3b^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t\right)dt = \frac{3\pi}{2}a^3b^3.$$

2) Avec Green Riemann, on pose $P = -a^2y^3$, $Q = b^2x^3$ et donc

$$I = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \iint_D\left(3b^2x^2 + 3a^2y^2\right)dx\,dy$$

On pose $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, $\mathrm{Jac} = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{pmatrix}$

de déterminant abr et il vient

$$I = \int_0^1\int_0^{2\pi} 3a^2b^2r^2\;abr\,d\theta\,dr = 2\pi.3a^3b^3\int_0^1 r^3\,dr = \frac{3\pi}{2}a^3b^3.$$

Exercice 2

1) $F \in C^1$ et on a $\frac{\partial F}{\partial \theta} = \begin{pmatrix}\sqrt{3}\,\mathrm{sh}\theta\cos\varphi \\ \sqrt{3}\,\mathrm{sh}\theta\sin\varphi \\ \mathrm{ch}\theta\end{pmatrix}$ et $\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix}-\sqrt{3}\,\mathrm{ch}\theta\sin\varphi \\ \sqrt{3}\,\mathrm{ch}\theta\cos\varphi \\ 0\end{pmatrix}$

donc $N(\theta,\varphi) = \frac{\partial F}{\partial\theta}\wedge\frac{\partial F}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}-\sqrt{3}\,\mathrm{ch}^2\theta\cos\varphi \\ -\sqrt{3}\,\mathrm{ch}^2\theta\sin\varphi \\ 3\,\mathrm{sh}\theta\,\mathrm{ch}\theta\end{pmatrix}$

2) On écrit que le vecteur $\begin{pmatrix}x - \sqrt{3}\,\mathrm{ch}\theta\cos\varphi \\ y - \sqrt{3}\,\mathrm{ch}\theta\sin\varphi \\ z - \mathrm{sh}\theta\end{pmatrix}$ est orthogonal au vecteur $N(\theta,\varphi)$ ce qui donne :

$$x\sqrt{3}\,\mathrm{ch}^2\theta\cos\varphi + y\sqrt{3}\,\mathrm{ch}^2\theta\sin\varphi - 3z\,\mathrm{sh}\theta\,\mathrm{ch}\theta - 3\,\mathrm{ch}\theta = 0$$

Si $(0,0,0)\in P$ on aurait $\mathrm{ch}\theta = 0$ impossible.

3) $\|N(\theta,\varphi)\|^2 = 3\,\mathrm{ch}^2\theta\,(\mathrm{ch}^2\theta + 3\,\mathrm{sh}^2\theta) = 3\,\mathrm{ch}^2\theta\,(1 + 4\,\mathrm{sh}^2\theta)$

$$\mathcal{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^t\|N(\theta,\varphi)\|\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\sqrt{3}\int_0^t(1 + 4\,\mathrm{sh}^2\theta)^{1/2}\,\mathrm{ch}\theta\,d\theta$$

Posons $s = \mathrm{sh}\theta$, $ds = \mathrm{ch}\theta\,d\theta$, $\theta = t \iff s = \mathrm{sh}t$ et donc

$$\mathcal{A} = 2\pi\sqrt{3}\int_0^{\mathrm{sh}t}(1 + 4s^2)^{1/2}\,ds$$

Posons $\alpha = \mathrm{Arg\,sh}\, 2s \iff \mathrm{sh}\alpha = 2s$

$ds = \frac{1}{2}\mathrm{ch}\alpha\, d\alpha$ et $s = \mathrm{sh}t \iff \alpha = \alpha_0 = \mathrm{Arg\,sh}\,[2\,\mathrm{sh}t]$

$$\mathcal{A} = \pi\sqrt{3}\int_0^{\alpha_0}(1+\mathrm{sh}^2\alpha)^{1/2}\mathrm{ch}\alpha\, d\alpha = \pi\sqrt{3}\int_0^{\alpha_0}\mathrm{ch}^2\alpha\, d\alpha = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\int_0^{\alpha_0}(\mathrm{ch}2\alpha+1)\, d\alpha$$

$$\mathcal{A} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2\alpha_0\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left[\mathrm{Arg\,sh}\,(2\,\mathrm{sh}t) + \mathrm{sh}\alpha_0\sqrt{1+\mathrm{sh}^2\alpha_0}\right]$$

$$\mathcal{A} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\left[\mathrm{Arg}\,(2\,\mathrm{sh}t) + 2\,\mathrm{sh}t\sqrt{1+4\,\mathrm{sh}^2 t}\right]$$

4) (H) est l'hyperboloïde d'équation $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3}-z^2=1$ dont l'intersection avec le plan $z=\lambda$ est le cercle $x^2+y^2=3(1+\lambda^2)$

$D(0,\sqrt{3(1+\lambda^2)})$

Alors $$V = \int_0^{\mathrm{sh}t}\left(\iint_{D(0,\sqrt{3(1+z^2)})} dx\,dy\right)dz$$

$$V = \int_0^{\mathrm{sh}t} 3\pi(1+z^2)\,dz = 3\pi\,\mathrm{sh}t + \pi(\mathrm{sh}t)^3$$

Exercice 3

1) φ est indéfiniment dérivable et à dérivées continues pour $x\neq 0$ donc $\varphi\in\mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ et il vient immédiatement

$$J_\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{z}{x^2} & 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}$$

2) $$D\varphi(x,y,z)(h,k,\ell) = J_\varphi(x,y,z)\begin{pmatrix}h\\k\\\ell\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h+k \\ -\frac{y}{x^2}h + \frac{k}{x} \\ -\frac{z}{x^2}h + \frac{\ell}{x}\end{pmatrix}$$

3) • $\varphi(\mathcal{O}) \subset \Omega$

En effet $x+y>0 \Rightarrow u>0$

$1+v = \frac{x+y}{x}$ avec $x+y>0$ et $x>0 \Rightarrow 1+v>0$

• Montrer que φ est une bijection de $\mathcal{O}$ sur Ω revient à montrer que pour $(u,v,w)\in\Omega$ donnés $\exists!\,(x,y,z)\in\mathcal{O}$ tq $\varphi(x,y,z)=(u,v,w)$.

Cela revient à résoudre le système

$$\begin{cases} (1) & x+y = u \\ (2) & y = xv \\ (3) & z = xw \end{cases}$$

(1) et (2) donnent $(1+v)y = vu$

or $1+v>0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{vu}{1+v}}$

En reportant dans (1) $x = u - \frac{vu}{1+v} = \frac{u}{1+v}$

et dans (3) $z = \frac{uw}{1+v}$. Donc φ est une bijection

De plus $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{O})$ et $\det J_\varphi(x,y,z) = \frac{x+y}{x^3} > 0$ dans $\mathcal{O}$

$\Rightarrow \varphi$ difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur Ω .

4) Il est clair que $D \subset \mathcal{O}$. De plus :

- Soit $(x,y,z) \in D$, il vient

  $x>0$ et $y>0 \Rightarrow u = x+y > 0$ et $y < 1-x \Rightarrow u < 1$

  $x>0$ et $0<y<x \Rightarrow 0 < v = \frac{y}{x} < 1$

  $x>0$ et $0<z<x \Rightarrow 0 < w = \frac{z}{x} < 1$

  donc $\varphi(x,y,z) \in]0,1[^3$

- Soit $(u,v,w) \in]0,1[^3$, il vient

$u>0, v>0, w>0 \Rightarrow x = \frac{u}{1+v} > 0$, $y = \frac{uv}{1+v} > 0$, $z = \frac{uw}{1+v} > 0$

$$\left.\begin{array}{l} u<1 \Rightarrow y < 1-x \\ \frac{y}{x} = v < 1 \Rightarrow y < x \end{array}\right\} \Rightarrow y < \min(x, 1-x)$$

$\frac{z}{x} = w < 1 \Rightarrow z < x$

$v > 0 \Rightarrow x = \frac{u}{1+v} < u$ et puisque $u < 1 \Rightarrow x < 1$

donc $\varphi^{-1}(u,v,w) \in D$

5) Posons $f(u,v,w) = \frac{1}{1+w^2}$ on a

$f \circ \varphi(x,y,z) \, |\det J_\varphi(x,y,z)| = \frac{x^2}{x^2+z^2} \cdot \frac{x+y}{x^3}$ et donc

par changement de variable

$$\iiint_D \frac{x+y}{x(x^2+z^2)} \, dx\,dy\,dz = \iiint_{\varphi(D)} f(u,v,w) \, du\,dv\,dw$$

$$= \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 \frac{dw}{1+w^2} = \Big[\operatorname{Arctg} w\Big]_{w=0}^{w=1} = \frac{\pi}{4}$$