Cours de Calcul Différentiel

Lubomir Gavrilov

CHAPITRE 1

Notions élémentaires de topologie

1. Normes, espace normés

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel réel. On appelle norme sur E toute application $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les axioms suivants
(i) $\forall x \in E$, $\|x\| = 0$ implique $x = 0$
(ii)$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
(iii) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
Un espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle un espace vectoriel normé.

Exemples. Chacune des applications suivantes défini une norme sur $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n : x_i \in \mathbb{R}\}$

$$x \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i|, x \longrightarrow \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|}, x \longrightarrow \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

Notons que si $n = 1$ les trois normes ci-dessus coïncident. Si $n > 1$ ceci n'est plus vrai, mais nous pouvons les considerer comme "équivalentes" au sens suivant

Définition 1.2. Deux normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ sur un espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$\forall x \in E, c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$$

(vérifiez que c'est une relation d'équivalence).

Alors

Proposition 1.3. *Soient $\|.\|_1, \|.\|_2$ deux normes sur un espace vectoriel réel E de dimension fini. Alors elles sont équivalentes.*

La preuve sera donnée à la fin de section 6.

2. Distances, espaces métriques

Définition 2.1. Soit E un ensemble. On appelle distance sur E toute application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivantes
(i)$\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(ii) $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$
(iii) $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$(inégalité triangulaire)
On appelle espace métrique tout ensemble E muni d'une distance d.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé. Alors il est facile de vérifier que $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E. Il s'en suit que tout espace normé est aussi un espace métrique.

Plus généralement, si $S \subset E$ est un ensemble, alors

$$d(x,y) = \|x - y\|, \forall x, y \in S$$

est une distance (même si S n'est pas un sous-espace vectoriel).

Nous pouvons définir, comme dans Définition1.2, des distances équivalentes. Contrairement au cas d'une norme, deux distances ne sont pas équivalentes (en général).

3. Espaces topologiques

DÉFINITION 3.1. On appelle espace topologique tout couple $(E, \mathcal{O})$ constitué d'un ensemble E et d'un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de E, appelées "ouverts", vérifiant les trois axiomes suivants

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$ et $E \in \mathcal{O}$

(ii)$\forall \Omega_i \in \mathcal{O}, \cup_{i\in I}\Omega_i \in \mathcal{O}$ (I est un ensemble *quelconque* d'indices)

(iii) $\forall \Omega_i \in \mathcal{O}, \cap_{i\in I}\Omega_i \in \mathcal{O}$ (I est un ensemble *fini* d'indices)

L'ensemble $\mathcal{O}$ est appelé topologie, et les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés les ouverts de la topologie. Une partie de E est dite fermée si son complémentaire est ouvert.

Quand il n'y a pas de confusion à craindre, on appellera E espace topologique, sans préciser la topologie $\mathcal{O}$ associé.

Exemples.

(1) La topologie discrète sur l'ensemble E est la topologie $\mathcal{O}_d = \mathcal{P}(E)$, l'ensemble des parties de E.
(2) La topologie grossière sur l'ensemble E est la topologie $\mathcal{O}_g = \{\emptyset, E\}$
(3) Tout espace métrique (E, d) possède une topologie $\mathcal{O}_d$ induite par d . Par définition un ensemble non-vide $\Omega \in \mathcal{O}_d$ est un ouvert si et seulement si $\forall x \in \Omega, \exists \varepsilon, \{y \in E : d(x,y) < \varepsilon\} \subset \Omega$.

Notons que deux normes équivalentes induisent la même topologie. Proposition 1.3 implique que $\mathbb{R}^n$ possède une topologie "canonique", induite par une norme quelconque.

DÉFINITION 3.2. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et soit $a \in E$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe un ouvert Ω, tel que $a \in \Omega \subset V$. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}(a)$.

PROPOSITION 3.3. *Un sous ensemble Ω d'un espace topologique est un ouvert si et seulement si tout point $x \in \Omega$ possède un voisinage V_x inclus dans Ω.*

La preuve est laissée en exercice.

DÉFINITION 3.4. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique et $A \subset E$. On appelle intérieur de A l'ensemble $\overset{\circ}{A} = \cup_{\Omega\in\mathcal{O},\Omega\subset A}\Omega$.

PROPOSITION 3.5. *$\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.*

Démonstration $\overset{\circ}{A}$ est un reunion d'ouverts et donc ouvert. Si $\Omega \subset A$ est un ouvert, alors par définition $\Omega \subset \overset{\circ}{A}$.$\square$

DÉFINITION 3.6. Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. On dit que a est adhérent au sous-ensemble A de E (ou est un point d'adhérence de A) si $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, $V \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points d'adhérence de A est noté $\bar{A}$. $\bar{A}$ s'appelle l'adhérence de A.

Proposition 3.7. *$\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

Démonstration On remarque que $E \setminus \bar{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}$. D'après Proposition 3.5 $\overset{\circ}{E \setminus A}$ est le plus grand ouvert inclus dans $E \setminus A$. Après passage au complémentaire on obtient que $\bar{A}$ est le plus petit fermé contenant A.□

4. Suites et continuité dans un espace topologique

Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique.

Définition 4.1. On dira que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers le point x de E si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(x)\, \exists n(V) \in \mathbb{N}, \text{ tel que si } n > n(V), x_n \in V.$$

Le point x sera appelé la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E et on notera : $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ou simplement $x_n \longrightarrow x$.

La limite d'une suite n'est pas unique : pour la topologie grossière toute suite converge vers tout point. Cependant dans un espace métrique la limite est unique.

Définition 4.2. Soit f une application entre espaces topologiques. On dit que f est continue en x si pour tout $V \in \mathcal{V}(f(x))$, l'image réciproque $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x. On dit que f est continue si elle est continue en tout point $x \in E$.

Proposition 4.3. *Une application f entre espaces topologiques est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert.*

Démonstration. Soit f est une application telle que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert et soit V un voisinage de $f(x)$. Par définition V contient un ouvert U lui même contenant $f(x)$. L'image réciproque de U est un ouvert contenant x et contenu dans l'image réciproque $f^{-1}(V)$ de V. Cela montre que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x et donc f est continue en x. Comme x était arbitraire, nous déduisons que f est une application continue.

Réciproquement, soit f une application continue et U un ouvert de l'espace topologique but. Il suffit de montrer que tout point $x \in f^{-1}(U)$ possède un voisinage inclus dans $f^{-1}(U)$ (Proposition 3.3). En effet, comme U est un voisinage (ouvert) de $f(x)$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert et donc un voisinage de x.□

Exercice 4.4. Soit E un espace topologique et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que l'ensemble $\{x \in E : f(x) < r\}$ est un ouvert et l'ensemble $\{x \in E : f(x) \leq r\}$ est un fermé.

Exercice 4.5. Montrer que dans un espace métrique (E, d) la boule ouverte $B(x, \varepsilon) = \{y \in E : d(x, y) < \varepsilon\}$ est un ensemble ouvert, et la boule fermée $B(x, \varepsilon) = \{y \in E : d(x, y) \leq \varepsilon\}$ est un ensemble fermé (ce qui justifie la terminologie "boule ouverte" et "boule fermée").

5. Suites et continuité dans un espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique. Rappelons que la distance d induit une topologie sur E.

Proposition 5.1. *Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si et seulement si pour tout ε il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que*

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Démonstration La boule ouverte $B(x, \varepsilon) = \{y : d(x, y) < \varepsilon\}$ est un voisinage de x. D'après Définition 4.1, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, alors il existe n_ε tel que $n > n_\varepsilon$ implique $x_n \in B(x, \varepsilon)$, c'est à dire $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Réciproquement, admettons que pour tout ε il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Soit V un voisinage de x. Par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x \in B(x, \varepsilon) \subset V$. Il suffit de poser $n(V) = n_\varepsilon$. $\square$

Proposition 5.2. *Une application f entre espaces métriques est continue en x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, implique $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.*

Démonstration. On suppose d'abord que f est continue en x et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x, telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$. Il existe un $\varepsilon > 0$ et une sous-suite extraite $(x_{n_i})_{n_i\in\mathbb{N}}$ telle que $d(f(x_{n_i}), f(x)) > \varepsilon$, $\forall i$ (pourquoi ?). Il s'en suit que l'image réciproque de la boule ouverte $B(f(x), \varepsilon)$ ne contient pas x_{n_i}, $\forall i$, et par conséquent $(x_{n_i})_{n_i\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers x, en contradiction avec la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x.

Réciproquement, supposons que pour tout suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

et soit V un voisinage de $f(x)$ tel que $f^{-1}(V)$ n'est pas un voisinage de x. Pour tout $\varepsilon = 1/n$ la boule ouverte $B(x, 1/n)$ n'est pas inclus dans $f^{-1}(V)$ et donc il existe $x_n \in B(x, 1/n)$, tel que $x_n \notin f^{-1}(V)$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que nous venons de construire converge vers x mais la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(x)$ car $f(x_n) \notin V$. La contradiction montre que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x.$\square$

Exercice 5.3. Visualiser la preuve ci-dessus en dessinant les suites et les ensembles associés.

Proposition 5.4. *Une application f entre espaces métriques est continue en x si et seulement si pour toute suite*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta, \text{ tel que } d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Définition 5.5. On dit qu'une application f entre espaces métriques tend vers b lorsque x tend vers a si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta, \text{ tel que } d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon.$$

On dit que b est la limite de f au point a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Proposition 5.6. *Une application f entre espaces métriques est continue en x si et seulement si $\lim_{y\to x} f(y) = f(x)$.*

Démonstration. C'est une re-formulation de Proposition 5.4.$\square$

Démonstration de Proposition 5.4. L'image réciproque de la boule ouverte $B(f(x), \varepsilon)$ de l'espace-but est un voisinage de x dans l'espace-source (Proposition 4.2). Il existe $\delta > 0$ tel que le boule ouverte $B(x, \delta)$ est contenue dans ce voisinage. Il s'en suit sue $f(B(x, \delta)) \subset f(B(f(x), \varepsilon))$. $\square$

Définition 5.7. Soit (E, d) un espace métrique. On dira que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E si elle vérifie :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n, m > N, d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

DÉFINITION 5.8. Un espace métrique sur lequel les suites de Cauchy sont convergentes sera appelé espace complet.

THÉORÈME 5.9. $\mathbb{R}^p$ *est un espace complet.*

RÉMARQUE 5.10. Rappelons que tout espace normé $(E, \|.\|)$ possède une distance $d(x,y) = \|x-y\|$. Lorsque E est de dimension fini, cette distance est essentiellement unique (à une équivalence près, voir Proposition 1.3).

Démonstration. Nous allons prouver d'abord que $\mathbb{R}$ est complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Rappelons le Théorème de Bolzano-Weierstrass :

Toute suite bornée dans $\mathbb{R}$ *possède une sous-suite convergente.*

Puisque toute suite de Cauchy est bornée, nous pouvons extraire une sous-suite numérique $(x_{n_i})_{n_i\in\mathbb{N}}$ convergente. Admettons que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in \mathbb{R}$. Quelque soit $\varepsilon > 0$, ils existent n_0, i_0, tels que si $m, n > n_0$, $i > i_0$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, |x_{n_i} - x_0| < \varepsilon.$$

Si n_i est tel que $i > i_0, n_i > n_0$ nous avons

$$|x_n - x_0| \leq |x_n - x_i| + |x_i - x_0| < 2\varepsilon$$

ce qui prouve que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}, ..., x_{n,p}) \in \mathbb{R}^p$ une suite de Cauchy dans l'espace normé $\mathbb{R}^p$, avec la norme

$$\|(x_1, x_2, ..., x_p)\| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_p|\,.$$

Puisque $\|x_m - x_n\| \leq |x_{m,i} - x_{n,i}|$, $i = 1, 2, ..., p$, les suites numériques

$$(x_{n,i})_{n_i\in\mathbb{N}}, i = 1, 2, ..., p$$

sont des suites de Cauchy qui, par conséquent, convergent vers $x_{0,i}$, $i = 1, 2, ..., p$ respectivement. L'inégalité

$$\|x_n - x_0\| = |x_{n,1} - x_{0,1}| + |x_{n,2} - x_{0,2}| + ... + |x_{n,p} - x_{0,p}|$$

implique que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x_0 \in \mathbb{R}^p$.$\square$

6. Ensembles compacts de $\mathbb{R}^p$

THÉORÈME 6.1. *Soit* $K \subset \mathbb{R}^p$. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) K *est fermé et borné*

(ii) De toute suite $(x_n)_{n_i\in\mathbb{N}}$, $x_n \in K$, *on peut extraire une sous-suite qui converge vers un point de* K

Démonstration. Supposons d'abord que K est un ensemble borné, c'est à dire il existe une boule $B(0,R)$, $R < \infty$, telle que $K \subset B(0,R)$. La suite

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_{n,1}, x_{n,2}, ..., x_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$$

est alors bornée et chacune des suites numériques $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2, ..., p$, est bornée aussi. Quite a remplacer la suite numérique $(x_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ par une sous-suite extraite, nous pouvons supposer qu'elle converge (théorème de Bolzano-Weierstrass). Nous obtenons ainsi une nouvelle suite bornée que nous noterons, par abus d'écriture, par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite aura la propriété que la suite numérique associée $(x_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. De la même manière, quite à remplacer $(x_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$ par une sous-suite extraite convergente, nous pouvons supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite bornée, ayant la propriété que les suites numériques

$$(x_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}, (x_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$$

convergent et ainsi de suite. Nous obtenons finalement une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que nous noterons, par abus d'écriture, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette nouvelle suite aura la propriété que chacune des suite numériques associées $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$, $i = 1, 2, ..., p$ converge, et donc la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Si de plus K est un ensemble fermé, nous obtenons que $x_0 \in K$. Cela montre que l'assertion (i) implique (ii).

Réciproquement, supposons que l'assertion (ii) soit vraie. Il est clair que K est un ensemble borné (pourquoi ?). Soit x_0 un point d'adhérence de K. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n - x_0\| < 1/n$, $x_n \in K$. L'assertion (ii) implique qu'il existe une sous-suite extraite $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un point de K. On en déduit que $x_0 \in K$ et que $K = \bar{K}$, c'est à dire K est un fermé. □

Définition 6.2. On appelle compact de $\mathbb{R}^p$ toute partie $K \in \mathbb{R}^p$ qui vérifie l'une des conditions (i) ou (ii) ci-dessus.

Théorème 6.3. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application continue. Alors l'image $f(K)$ de K est un compact de $\mathbb{R}^p$.*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \in f(K)$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite, telle que $f(x_n) = y_n, \forall n$. Il existe une sous-suite extraite $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente vers un point de K. L'application f étant continue, nous concluons que la suite extraite $(y_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un point de $f(K)$. □

Corollaire 6.4. *Soient K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

Démonstration. Soit $b = \sup\limits_{x\in K} f(x)$, $a = \inf\limits_{x\in K} f(x)$. Puisque $f(K)$ est compact, il est fermé et borné. Il s'en suit que $a, b \in \mathbb{R}$ existent (d'près l'axiome de la borne supérieure) et $a, b \in f(K)$ (puisque K est fermé). □

Preuve de Proposition 1.3. Nous avons déjà remarqué qu'une suite dans $\mathbb{R}^p$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_{n,1}, x_{n,2}, ..., x_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$$

converge vers $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,p})$ si et seulement si les suites numériques $(x_{n,i})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers $x_{0,i}$. Soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes dans $\mathbb{R}^p$. Il s'en suit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0 au sens de la norme $\|.\|_1$ si et seulement si elle converge au sens de la norme $\|.\|_2$. Théorème 6.1 (ii) implique qu'un ensemble $K \subset \mathbb{R}^p$ est compact au sens de la norme $\|.\|_1$ si et seulement si K est compact au sens de la norme $\|.\|_2$. Soit $K = \{x \in \mathbb{R}^p : \|x\|_1 \leq 1\}$, la boule fermé au sens de la norme $\|.\|_1$. K est un compact au sens de $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ et donc $\sup\limits_{x\in K} \|x\|_2 = C$ est une constante finie. Cela montre que $\|x\|_1 \leq C \|x\|_2$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$. De la même manière on montre qu'il existe une constante finie c, telle que $\|x\|_2 \leq c \|x\|_1$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$.□

CHAPITRE 2

Dérivées Partielles

Bibliographie